Delprov B	Uppgift 1-9. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 10-19. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	150 minuter för Delprov B och Delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 61 poäng varav 21 E-, 23 C- och 17 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 15 poäng
D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 31 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå
B: 41 poäng varav 5 poäng på A-nivå
A: 49 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ______________________________

Födelsedatum: ______________________________

Gymnasieprogram/Komvux: ______________________________

Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i provhäftet.

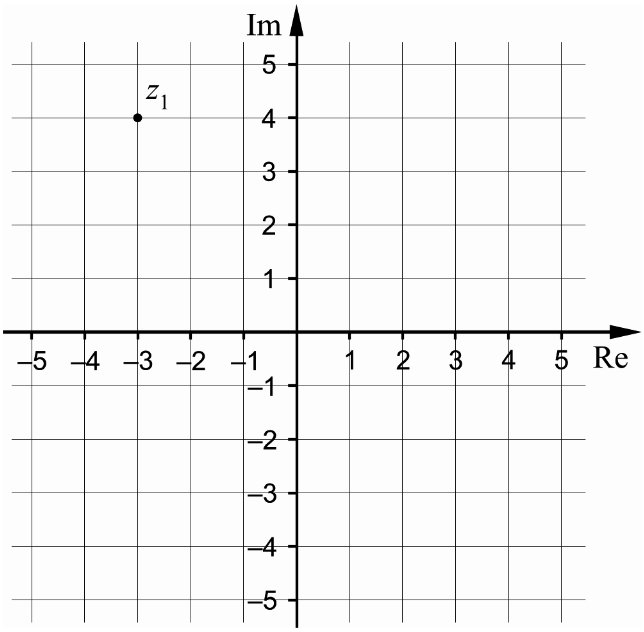
1. Derivera

a) $f(x) = \sin 4x + \cos x$ ______________________ (1/0/0)

b) $f(x) = 2x \cdot e^x$ ______________________ (1/0/0)

2. Bestäm för vilket värde på x som uttrycket $123 + |x - 7|$ antar sitt minsta värde. ______________________ (1/0/0)

3. Figuren visar ett komplext talplan där talet z_1 är markerat.



a) Bestäm konjugatet till z_1 $\bar{z}_1 =$ ______________________ (1/0/0)

b) Markera ett tal z_2 i första kvadranten så att $\operatorname{Re} z_2 < \operatorname{Im} z_2$ (1/0/0)

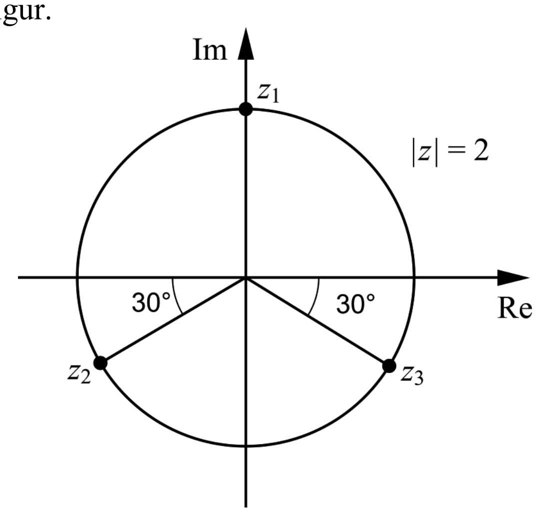
c) Markera ett tal z_3 i tredje kvadranten så att $|z_3| = \sqrt{10}$ (0/1/0)

4. Bestäm konstanten A så att det minsta värde funktionen $y = A + 5\sin 2x$ kan anta är 3 ______________________ (1/0/0)

5. Bestäm $\cos 2x$ uttryckt i p om $\cos x = p$. ______________________ (0/1/0)

6. Vilket är det största värde $3 - 4\sin x \cos x$ kan anta? ______________________ (0/0/1)

7. De komplexa talen z_1, z_2 och z_3 ligger på cirkeln $|z| = 2$
Se figur.



Bestäm en tredjegradsekvation vars rötter är z_1, z_2 och z_3 ______________________ (0/0/1)

8. Två av följande ekvationer A–G är asymptoter till $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2}$

Vilka två?

A. $x = 0$

B. $y = 0$

C. $x = 1$

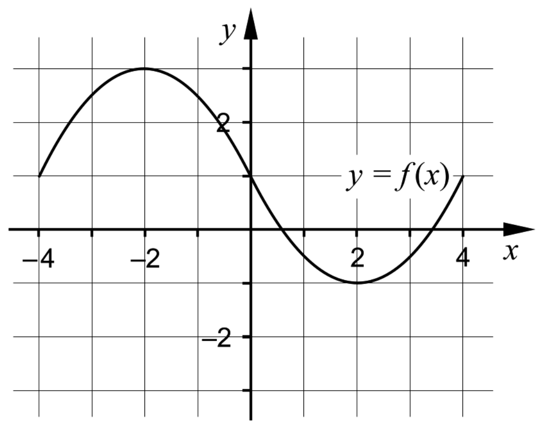
D. $y = 2$

E. $y = x^2 - 3x$

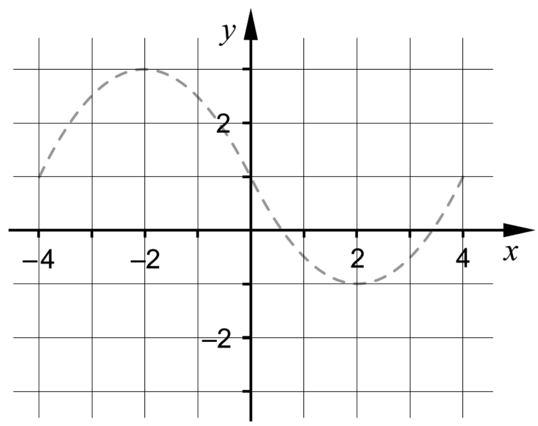
F. $y = x + 2$

G. $y = x - 3$ ______________________ (0/0/1)

9. I koordinatsystemet är kurvan $y = f(x)$ ritad.



Använd koordinatsystemet nedan och skissa kurvan $y = f(|x|)$
i intervallet $-4 \le x \le 4$
För att underlätta din skissning är kurvan $y = f(x)$ inritad med en streckad linje.

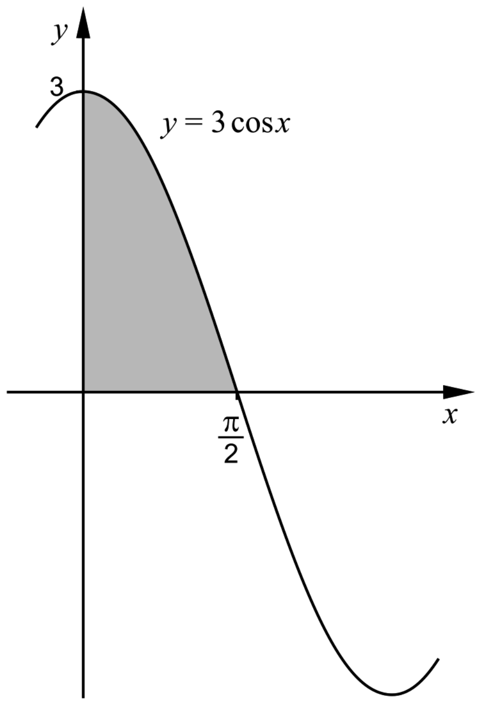


(0/0/1)

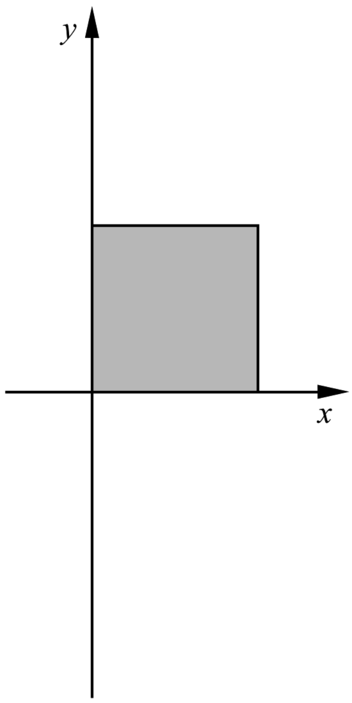
Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

10. Det skuggade området i figur 1 begränsas av kurvan $y = 3\cos x$ och de positiva koordinataxlarna. Kvadraten i figur 2 har lika stor area som det skuggade området i figur 1.

Figur 1.



Figur 2.



Bestäm kvadratens sidlängd uttryckt i längdenheter. Svara exakt. (2/0/0)

11. Visa att $\dfrac{\sin x}{\tan x(\cos^2 x + \sin^2 x)} = \cos x$ för alla x där uttrycken är definierade. (2/0/0)

12. Funktionen $f(x) = \ln x - x$ är definierad för $x > 0$ och har exakt en extrempunkt.

Bestäm extrempunktens x-koordinat och undersök om det är en maximi- eller minimipunkt. (2/1/0)

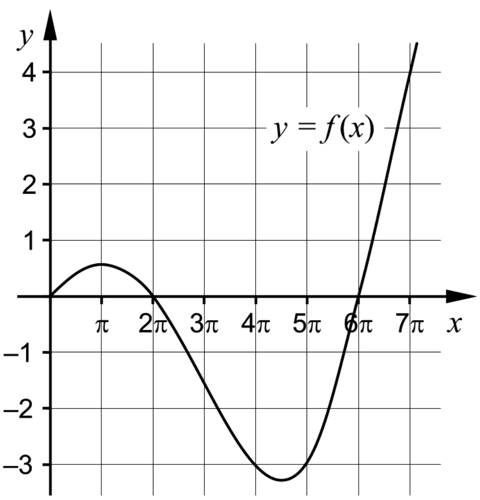
13. Beräkna z^4 då $z = \sqrt{3}(\cos 45° + i \sin 45°)$
Förenkla svaret så långt som möjligt. (2/0/0)

14. Polynomet $p(x) = x^3 - 5x - 12$ har ett nollställe $x = 3$
Bestäm övriga nollställen till polynomet. (1/2/0)

15. Ekvationen $x^2 + ax + b = 0$ har en rot $x = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$
Bestäm de reella konstanterna a och b. (0/3/0)

16. Visa att det går att bestämma konstanten a så att funktionen
$f(x) = x + \dfrac{a}{x+1}$ får ett minimum för $x = 1$ (0/3/0)

17. Figuren visar grafen till en funktion $y = f(x)$.



En ny funktion g definieras av $g(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$ i intervallet $0 \le t \le 7\pi$

a) Undersök för vilket värde på t som funktionen g har sitt minsta värde i intervallet $0 \le t \le 7\pi$ (0/1/0)

b) Undersök antalet nollställen till funktionen g i intervallet $\pi \le t \le 7\pi$ (0/0/1)

18. Funktionen $f(x) = x\cos x - \sin x$ har derivatan $f'(x) = -x\sin x$

a) Visa att $f'(x) = -x\sin x$ om $f(x) = x\cos x - \sin x$ (0/1/0)

b) Bestäm $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x \, dx$ (0/0/2)

19. Visa att polynomet $p(x) = x^3 + 3x - 18$ har exakt ett reellt nollställe. (0/0/3)

Delprov D	Uppgift 20-28. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 61 poäng varav 21 E-, 23 C- och 17 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 15 poäng
D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 31 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå
B: 41 poäng varav 5 poäng på A-nivå
A: 49 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ____

Födelsedatum: ____

Gymnasieprogram/Komvux: _______________________________

Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

20. Fredrik testar sitt blodtryck med en blodtrycksmätare. Han observerar att blodtryckets högsta värde är 129 mm Hg och att dess lägsta värde är 83 mm Hg. Fredrik vill ställa upp en funktion som beskriver blodtrycket och antar att trycket y mm Hg varierar enligt sambandet $y = A\sin kt + B$, där t är tiden i sekunder. Fredrik konstaterar också att tiden mellan två hjärtslag är 1,2 sekunder, vilket motsvarar perioden för denna funktion.

Faktaruta: Blodtryck

Blodtrycket är det tryck som blodet utövar i blodkärlen. Blodtrycket har sitt högsta värde (Systoliskt tryck) när hjärtat dras samman och sitt lägsta värde (Diastoliskt tryck) när hjärtat utvidgas. Blodtrycket mäts i enheten mm Hg.

Bestäm konstanterna A, B och k. (2/1/0)

21. Ekvationen $\frac{x}{4} + \sin 3x = 2{,}65$ har flera lösningar.

Samtliga lösningar ligger i intervallet $0 \leq x \leq 6\pi$

a) Bestäm den minsta lösningen till ekvationen. Svara med minst tre värdesiffror. *Endast svar krävs* (1/0/0)

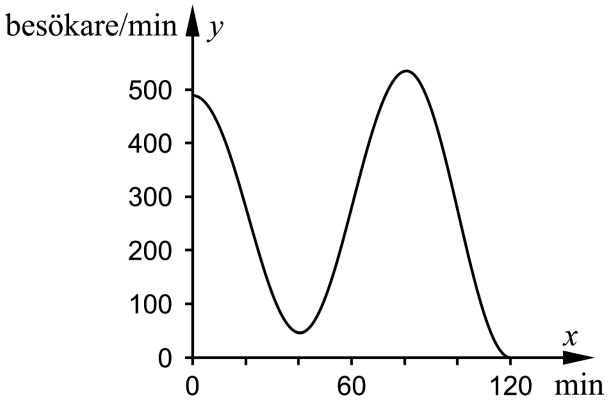
b) Bestäm antalet lösningar till ekvationen. *Endast svar krävs* (1/0/0)

22. På en biljett till One Direction på Friends Arena står det ”Konserten börjar kl. 21.30. Arenan öppnas kl. 19.30.”

Enligt en förenklad modell fylls arenan med hastigheten y besökare/minut,

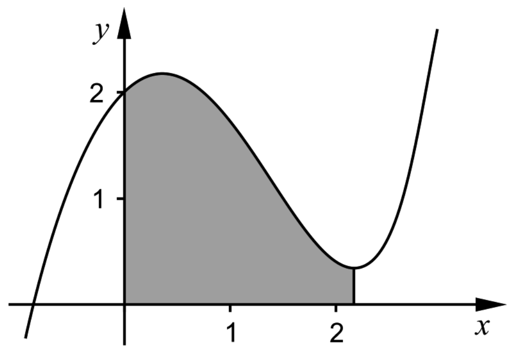
där $y = 280 + (210 + 0{,}583x) \cdot \cos \dfrac{\pi \cdot x}{40}$

och x är tiden i minuter efter att arenan öppnas.
Modellen antas gälla mellan 19.30 och 21.30.



Beräkna antalet besökare i arenan då konserten börjar. (2/0/0)

23. Bestäm arean av det område som begränsas av kurvan $y = 1 - 2x^2 + e^x$, de positiva koordinataxlarna och en lodrät linje genom kurvans minimipunkt. Svara med minst tre värdesiffror.



(0/2/0)

24. Ange en funktion som har den lodräta asymptoten $x = 1$ och som har den vågräta asymptoten $y = 2{,}5$ *Endast svar krävs* (0/1/0)

25. Företaget Konservburken tillverkar konserver med krossade tomater. På en viss sorts burkar med krossade tomater anges att innehållet väger 400 gram. Som ett led i företagets kvalitetskontroll vägs innehållet i ett antal burkar. Det visar sig att vikten är normalfördelad med medelvikten 404 gram och standardavvikelsen 5,0 gram. För att uppfylla företagets viktkrav ska burkarna innehålla minst 395 gram krossade tomater.

Bestäm sannolikheten att en slumpvis vald konservburk innehåller minst 395 gram krossade tomater. (0/2/0)

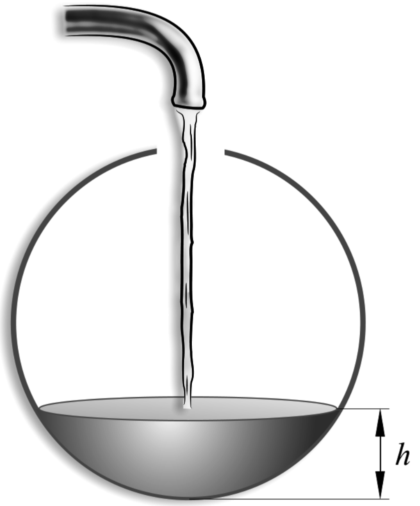
26. Efter en måltid stiger normalt blodsockerhalten till en början, för att sedan sjunka. Johan har fått sin blodsockerhalt undersökt under en tvåtimmarsperiod efter att han ätit frukost. Enligt en förenklad modell kan blodsockerhalten under denna period beskrivas med sambandet $y = 0{,}032x^2\mathrm{e}^{-0{,}070x} + 4{,}0$ där y är blodsockerhalten i millimolar och x är tiden i minuter efter frukostens slut.

a) Bestäm med vilken hastighet Johans blodsockerhalt ändras 60 minuter efter frukostens slut. (0/2/0)

b) Bestäm när Johans blodsockerhalt ökar som snabbast. (0/0/2)

27. Cecilia och Laila har fått i uppgift att lösa följande problem:

En sfärisk behållare har radien 5,0 dm. Vatten fylls på uppifrån med hastigheten 3,0 liter/min.



Med vilken hastighet ökar vattendjupet h då det är 2,5 dm?

De inser att de först måste bestämma vattenvolymen som funktion av höjden. Cecilia genomför den bestämningen genom att ställa upp en rotationsvolym och kommer fram till $V(h) = \frac{\pi}{3}(15h^2 - h^3)$ där V är vattenvolymen i dm^3 och h är vattendjupet i dm.

Sedan använder Laila detta volymuttryck för att beräkna den efterfrågade hastigheten. Hon får svaret 0,051 dm/min.

a) Använd sambandet $V(h) = \frac{\pi}{3}(15h^2 - h^3)$ och genomför Lailas beräkning. (0/2/0)

b) Genomför Cecilias bestämning av formeln $V(h) = \frac{\pi}{3}(15h^2 - h^3)$ (0/0/2)

28. För kurvan $y = f(x)$ gäller att $f(x) > 0$ för alla x. Området som begränsas av kurvan $y = f(x)$, linjerna $x = a$ och $x = b$ samt x-axeln har arean A areaenheter.

En annan kurva definieras av $y = k \cdot f(x)$, där k är en konstant och $k \neq 1$.

Ett annat område begränsas av kurvorna $y = k \cdot f(x)$ och $y = f(x)$ samt av linjerna $x = a$ och $x = b$.
Undersök hur arean av detta område beror av A och k. (0/0/3)

Innehåll

Allmänna riktlinjer för bedömning 3
  Bedömningsanvisningar 3
  Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga 4
Provsammanställning – Kunskapskrav 5
Provsammanställning – Centralt innehåll 6
Kravgränser 7
Resultatsammanställning 7
Bedömningsformulär 8
Bedömningsanvisningar 9
  Delprov B 9
  Delprov C 10
  Delprov D 12
Bedömda elevlösningar 15
  Uppgift 9 15
  Uppgift 11 15
  Uppgift 12 16
  Uppgift 15 17
  Uppgift 17a 19
  Uppgift 17b 19
  Uppgift 19 21
  Uppgift 25 23
  Uppgift 28 25
Ur ämnesplanen för matematik 27
Kunskapskrav Matematik kurs 4 28
Centralt innehåll Matematik kurs 4 29

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsanvisningar

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt två olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.

Modell 1:

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2:

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. … 1 E_R	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. … 1 E_R och 1 C_R	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. … 1 E_R, 1 C_R och 1 A_R

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga
Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=,\ \neq,\ <, >, \leq, \geq,\ \approx,\ \pm,\ \sqrt{\ }\ ,\ f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ x,\ y, (\ ), [\ ], \int, \mathrm{d}x,$ gradtecken, index, lim, VL, HL, $\sin v$, $\sin^2 v$
Termer	t.ex. komplext tal, komplext talplan, real-/imaginärdel, polär/rektangulär form, absolutbelopp, argument, konjugat, reell/komplex rot, enhetscirkel, period, amplitud, fasförskjutning, radian, ekvation, funktion, funktionsvärde, definitionsmängd, värdemängd, koefficient, nollställe, skärningspunkt, graf, asymptot, derivata, andraderivata, förändringshastighet, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, växande, avtagande, integral, integrationsgräns, primitiv funktion, längd-/area-/volymenhet, rotationskropp, intervall, sannolikhetsfördelning, normalfördelning, täthetsfunktion, standardavvikelse, polynomdivision, differentialekvation, begynnelsevillkor
Hänvisningar	t.ex. till de Moivres formel, avståndsformeln, faktorsatsen, enhetscirkeln, trigonometriska formler, deriveringsregler, kedjeregeln, figur
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabell, angivna enheter

Provsammanställning – Kunskapskrav

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 4 i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 10_1 och 10_2 den första respektive andra poängen i uppgift 10.

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
B	1a		1										
	1b		1										
	2	1											
	3a	1											
	3b	1											
	3c					1							
	4			1									
	5							1					
	6									1			
	7											1	
	8										1		
	9									1			
C	10_1			1									
	10_2			1									
	11_1				1								
	11_2				1								
	12_1		1										
	12_2				1								
	12_3								1				
	13_1		1										
	13_2		1										
	14_1	1											
	14_2						1						
	14_3						1						
	15_1							1					
	15_2							1					
	15_3								1				
	16_1						1						
	16_2								1				
	16_3								1				
	17a								1				
	17b												1
	18a						1						
	18b_1									1			
	18b_2										1		
	19_1												1
	19_2												1
	19_3												1

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
D	20_1	1											
	20_2	1											
	20_3					1							
	21a		1										
	21b		1										
	22_1			1									
	22_2			1									
	23_1						1						
	23_2						1						
	24					1							
	25_1							1					
	25_2							1					
	26a_1							1					
	26a_2							1					
	26b_1											1	
	26b_2											1	
	27a_1							1					
	27a_2							1					
	27b_1											1	
	27b_2											1	
	28_1											1	
	28_2											1	
	28_3												1
	Total	**6**	**7**	**5**	**3**	**3**	**6**	**9**	**5**	**3**	**2**	**7**	**5**
Σ	**61**	**21**				**23**				**17**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Provsammanställning – Centralt innehåll

Tabell 2 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 4 i förhållande till nivå och centralt innehåll. En lista över det centrala innehållet återfinns i slutet av detta häfte.

Del-prov	Uppg.	Nivå			Centralt innehåll Kurs Ma4															
					Aritmetik, algebra och förändring								Samband och förändring					Problem-lösning		
		E	C	A	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	F17	F18	F19	F20	F21	P1	P3	P4
B	1a	1	0	0											X					
	1b	1	0	0											X					
	2	1	0	0									X							
	3a	1	0	0		X	X													
	3b	1	0	0		X														
	3c	0	1	0		X	X													
	4	1	0	0									X					X		
	5	0	1	0						X								X		
	6	0	0	1						X			X							
	7	0	0	1		X		X			X							X		
	8	0	0	1										X						
	9	0	0	1									X							
C	10	2	0	0												X		X		
	11	2	0	0						X		X								
	12	2	1	0											X					
	13	2	0	0				X												
	14	1	2	0					X											
	15	0	3	0	X				X									X		
	16	0	3	0								X			X					
	17a	0	1	0												X				
	17b	0	0	1												X				
	18a	0	1	0											X					
	18b	0	0	2												X				
	19	0	0	3					X			X								
D	20	2	1	0									X							
	21a	1	0	0							X									
	21b	1	0	0							X									
	22	2	0	0												X		X	X	
	23	0	2	0												X				
	24	0	1	0										X						
	25	0	2	0												X		X	X	
	26a	0	2	0											X			X	X	
	26b	0	0	2											X			X	X	
	27a	0	2	0											X			X	X	
	27b	0	0	2												X		X	X	
	28	0	0	3												X		X		
Total		21	23	17																

Kravgränser

Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 61 poäng varav 21 E-, 23 C- och 17 A-poäng.
Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla tre delprov.

Kravgräns för provbetyget
E: 15 poäng
D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 31 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå
B: 41 poäng varav 5 poäng på A-nivå
A: 49 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Bedömningsformulär

Elev:___________________________ Klass:_______________ Provbetyg:____________

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
B	1a												
	1b												
	2												
	3a												
	3b												
	3c												
	4												
	5												
	6												
	7												
	8												
	9												
C	10_1												
	10_2												
	11_1												
	11_2												
	12_1												
	12_2												
	12_3												
	13_1												
	13_2												
	14_1												
	14_2												
	14_3												
	15_1												
	15_2												
	15_3												
	16_1												
	16_2												
	16_3												
	17a												
	17b												
	18a												
	18b_1												
	18b_2												
	19_1												
	19_2												
	19_3												

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
D	20_1												
	20_2												
	20_3												
	21a												
	21b												
	22_1												
	22_2												
	23_1												
	23_2												
	24												
	25_1												
	25_2												
	26a_1												
	26a_2												
	26b_1												
	26b_2												
	27a_1												
	27a_2												
	27b_1												
	27b_2												
	28_1												
	28_2												
	28_3												
	Total												
Σ													

	Total	6	7	5	3	3	6	9	5	3	2	7	5
Σ	61	21				23				17			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Bedömningsanvisningar

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

Delprov B

1.		**Max 2/0/0**
a)	Korrekt svar ($f'(x) = 4\cos 4x - \sin x$)	+1 E_P
b)	Korrekt svar ($f'(x) = 2e^x + 2xe^x$)	+1 E_P
2.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (7)	+1 E_B
3.		**Max 2/1/0**
a)	Godtagbart svar ($\bar{z}_1 = -3 - 4i$)	+1 E_B
b)	Godtagbart markerad punkt (t ex $z_2 = 1 + 2i$)	+1 E_B
c)	Godtagbart markerad punkt (t ex $z_3 = -3 - i$)	+1 C_B
4.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar ($A = 8$)	+1 E_{PL}
5.		**Max 0/1/0**
	Korrekt svar ($2p^2 - 1$)	+1 C_{PL}
6.		**Max 0/0/1**
	Korrekt svar (5)	+1 A_B
7.		**Max 0/0/1**
	Korrekt svar (t ex $z^3 = -8i$)	+1 A_{PL}
	Kommentar: En korrekt ekvation i faktorform godtas.	

8. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (Alternativ A: $x = 0$ och G: $y = x - 3$)	+1 A_P

9. **Max 0/0/1**

Godtagbart skissad graf	+1 A_B

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Delprov C

10. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, tecknar $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x \, \mathrm{d}x$	+1 E_{PL}
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($\sqrt{3}$)	+1 E_{PL}

11. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex skriver om nämnaren i VL med trigonometriska ettan	+1 E_R
med ett i övrigt enkelt resonemang som visar att likheten gäller	+1 E_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

12. **Max 2/1/0**

Godtagbar ansats, t ex bestämmer derivatans nollställe korrekt	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = 1$, maximipunkt)	+1 E_R
Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4	+1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

13. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex sätter in värden korrekt i de Moivres formel	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (–9)	+1 E_P

14. **Max 1/2/0**

Godtagbar ansats, t ex inser att $x-3$ är en faktor i polynomet +1 E_B

med godtagbar fortsättning, t ex genomför polynomdivisionen och tecknar ekvationen $x^2+3x+4=0$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x=-1,5\pm i\sqrt{1,75}$) +1 C_P

Kommentar: Svaret $x=-1,5\pm\sqrt{-1,75}$ anses inte godtagbart.

15. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, t ex korrekt insättning av roten med korrekt förenkling *eller* kommer fram till uttrycket $(x-(1+i\sqrt{3}))\cdot(x-(1-i\sqrt{3}))$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($a=-2$ och $b=4$) +1 C_{PL}

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

16. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, t ex bestämmer $f'(x)$ korrekt +1 C_P

med godtagbar fortsättning, t ex bestämmer a så att $f'(1)=0$ +1 C_R

med ett i övrigt välgrundat resonemang där minimum verifieras för $x=1$ när $a=4$ +1 C_R

17. **Max 0/1/1**

a) Välgrundat resonemang om att arean under grafen ger ett negativt bidrag till integralen med slutsatsen att integralen antar sitt minsta värde för $t=6\pi$ +1 C_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

b) Välgrundat och nyanserat resonemang om att g:s värde går från positivt till negativt men inte når upp till positivt värde igen med slutsatsen att g har ett och endast ett nollställe +1 A_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

18. **Max 0/1/2**

a) Godtagbar lösning som leder till att $f'(x) = -x \sin x$ +1 C_P

b) Godtagbar ansats, t ex bestämmer korrekt primitiv funktion +1 A_B

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (1) +1 A_P

19. **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, visar att $p(x)$ har minst ett reellt nollställe *eller* att $p(x)$ har högst ett reellt nollställe +1 A_R

med ett i övrigt godtagbart resonemang som visar att $p(x)$ har exakt ett reellt nollställe +1 A_R

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Delprov D

20. **Max 2/1/0**

Godtagbar ansats, bestämmer minst en av konstanterna A, B eller k +1 E_B

med godtagbar fortsättning, bestämmer minst två av konstanterna A, B eller k +1 E_B

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (t ex $A = 23$, $B = 106$ och $k = 5,2$) +1 C_B

21. **Max 2/0/0**

a) Godtagbart svar ($x = 6,72$) +1 E_P

b) Korrekt svar (9) +1 E_P

22. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex anger att antalet besökare bestäms av integralen

$$\int_0^{120} (280 + (210 + 0{,}583x)\cos\frac{\pi x}{40})\,dx$$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (33 400) +1 E_M

23. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, bestämmer minimipunktens x-koordinat, $x = 2{,}153$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (3,11 a.e.) +1 C_P

24. **Max 0/1/0**

Korrekt svar (t ex $y = \dfrac{1}{x-1} + 2{,}5$) +1 C_B

25. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, använder inbyggd funktion på räknaren eller ställer upp ett godtagbart uttryck för den sökta sannolikheten, t ex $\dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{395}^{500} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-404}{5}\right)^2} \mathrm{d}x$ +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (96 %) +1 C_M

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

26. **Max 0/2/2**

a) Godtagbar ansats, t ex anger att $y'(60)$ ska bestämmas +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($-0{,}063$ millimolar/min) +1 C_M

b) Godtagbar ansats, t ex anger att maximum av $y'(x)$ ska bestämmas +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (8,4 minuter) +1 A_M

27. **Max 0/2/2**

a) Godtagbar ansats, t ex tecknar kedjeregeln och bestämmer $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}$ *eller* tecknar kedjeregeln och inser att $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 3{,}0$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning som ger svaret 0,051 dm/min +1 C_{PL}

b) Godtagbar ansats, t ex ställer upp ett korrekt integraluttryck för vattenvolymen, t ex $\displaystyle\int_{5-h}^{5} \pi(5^2 - x^2)\,\mathrm{d}x$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning som leder till $V(h) = \dfrac{\pi}{3}(15h^2 - h^3)$ +1 A_{PL}

28. **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, bestämmer minst ett av de möjliga uttrycken för den sökta arean +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($A(k-1)$ för $k>1$ och $A(1-k)$ för $k<1$) +1 A_{PL}

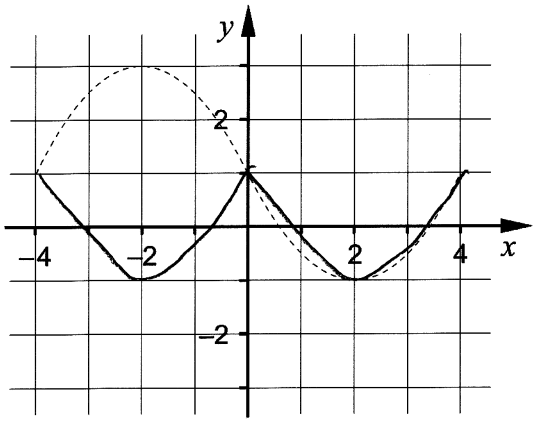
Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Bedömda elevlösningar

Uppgift 9

Elevlösning 1 (1 A_B)



Kommentar: Skissen är något kantig men visar i grova drag hur den korrekta grafen ser ut. Därmed uppfylls nätt och jämnt kraven för begreppspoäng på A-nivå.

Uppgift 11

Elevlösning 1 (1 E_R)

$$\frac{\sin x}{\tan x\,(\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{1})} = \cos x$$

$$\frac{\sin x}{\tan x} = \cos x$$

$$\sin x = \tan x \cdot \cos x$$

$$\sin x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x$$

Kommentar: Elevlösningen bygger från och med tredje raden på likheten som ska visas. Lösningen bedöms därmed inte uppfylla kravet för den andra resonemangspoängen på E-nivå.

Uppgift 12

Elevlösning 1 (1 E_P och 1 E_R)

$f(x) = \ln x - x \qquad f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \qquad x = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(1) = -\frac{1}{1} = -1$

Svar: Maximipunkt

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Gällande kommunikation saknas motivering till att $x = 1$ är derivatans nollställe och till varför punkten är en maximipunkt. Dessutom är svaret ofullständigt. Dessa brister gör att kraven för kommunikationspoäng på C-nivå inte uppfylls.

Elevlösning 2 (1 E_P, 1 E_R och 1 C_K)

$f(x) = \ln x - x$

$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$

$\frac{1}{x} - 1 = 0$

$\frac{1}{x} = 1$

$x = 1$

x	$\frac{1}{2}$	1	2
y	↗		↘

Svar: X koordinaten är 1.
Och är en maxpunkt.

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet och svaret är korrekt. Gällande kommunikation är lösningen möjlig att följa och förstå trots att teckentabellen är ofullständig. Sammantaget ges lösningen en procedur- och en resonemangspoäng på E-nivå samt nätt och jämnt en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 15

Elevlösning 1 (2 C_{PL})

Om $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$ är $x_2 = 1 - i\sqrt{3}$

dvs $x = 1 \pm i\sqrt{3}$

enligt pq-formeln är $a = -2$ och

då måste $b = 4$ för att det ska bli $\sqrt{-3}$

i pq-formeln.

Svar: $a = -2$

$b = 4$

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften på ett knapphändigt men godtagbart sätt. När det gäller kommunikation är lösningen inte helt lätt att följa och förstå. Det saknas t ex förklaring till slutsatserna om *a* och *b* på raderna 3-5. Därmed bedöms lösningen inte uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (2 C_{PL} och 1 C_K)

$x^2 + ax + b = 0 \qquad x = 1 + i\sqrt{3}$

$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 - b} \Rightarrow \left(-\frac{a}{2}\right) = 1$

$\frac{a}{2} = 1 \cdot (-1) = -1$

$a = 2 \cdot (-1) = -2$

$a = -2$

$i\sqrt{3} = \sqrt{\left(-\frac{-2}{2}\right)^2 - b}$

$\left(-\frac{-2}{2}\right)^2 = 1 \qquad \sqrt{3} \cdot i = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-3}$

$\sqrt{-3} = \sqrt{1 - b}$

$1 - b = -3$

$b = 4$

Svar: $a = -2$

$b = 4$

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet och leder fram till ett korrekt svar. Gällande kommunikation hade lösningen kunnat vara mer strukturerad men anses ändå möjlig att följa och förstå. Därmed anses lösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng.

Uppgift 17a

Elevlösning 1 (0 poäng)

Först ökar arean, sedan minskar den till $t = 6\pi$.

Då är g som minst.

Kommentar: Elevlösningen innehåller ett resonemang som leder till det korrekta svaret. Dock framgår det inte vad som menas med ”sedan minskar den till $t = 6\pi$ ”. Resonemang om att arean under grafen bidrar negativt till integralen saknas. Därmed uppnås inte resonemangspoängen på C-nivå.

Elevlösning 2 (1 C_R)

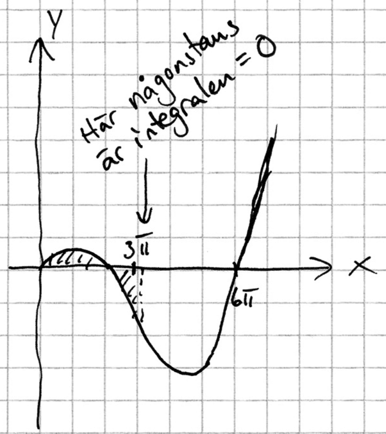
Arean ökar först, sedan äts arean upp av den stora "negativa arean". När den tar slut har g(t) sitt minsta värde. Då är $t = 6\pi$.

Kommentar: Elevlösningen innehåller ett resonemang som leder till det korrekta svaret. Trots flera brister i det matematiska språket visar elevens resonemang på förståelse för hur integralens värde hänger ihop med areor i detta sammanhang. Därmed uppnås nätt och jämnt resonemangspoängen på C-nivå.

Uppgift 17b

Elevlösning 1 (0 poäng)

b) Vid nollstället ska alltså $\int_0^t f(x)\,dx = 0$



Det står inget om var eventuella nollställen ligger. Jag kan därför undersöka med blicken var integralen skulle kunna vara noll. Vid drygt $3\pi = t$ ser det ut som. Man kan se att efter det kommer integralen aldrig över noll igen.

Kommentar: Elevlösningen innehåller ett korrekt resonemang som leder fram till en uppskattning av första nollstället. Fortsättningen ”Man kan se…” anses inte tillräcklig för att visa att inga fler nollställen finns. Därmed uppfylls inte kravet på resonemang på A-nivå.

Elevlösning 2 (0 poäng)

b) Nollställen inträffar varje gång den positiva delen blir lika stor som den negativa, alltså när

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx + \int_{2\pi}^{N} f(x)\,dx = 0 \quad \leftarrow \text{nollställe} = N$$

Vi ser att areorna över/under är lika då $N \approx 3\pi$.

$$\int_N^{6\pi} f(x)\,dx + \int_{6\pi}^{7\pi} f(x)\,dx \neq 0$$ eftersom arean

över x-axeln är mycket mindre.

Vi får 1 nollställe.

Kommentar: Elevlösningen innehåller inledningsvis ett godtagbart resonemang som leder fram till ett korrekt hittat nollställe. Det fortsatta resonemanget mynnar ut i att totala integralen för resten av intervallet inte kan vara noll ”eftersom arean över x-axeln är mycket mindre”. Det saknas dock argument för att andra nollställen kan uteslutas. Därmed uppfylls inte resonemangspoängen på A-nivå.

Elevlösning 3 (1 A_R)

b) g är 0 då arean över och arean under är lika stora. Vi ser ur grafen att det inträffar strax till höger om 3π. Sedan minskar g och blir alltmer negativ till 6π, då den ökar lite igen. Ökningen är mindre än minskningen varil så g blir inte 0 igen.

g har 1 nollställe

Kommentar: Elevlösningen inleds med att ett korrekt nollställe till g tas fram. Argumentet ”Vi ser ur grafen…” är i sig otillräckligt men får i detta sammanhang tillsammans med den inledande meningen om areor och det korrekt funna nollstället till g anses tillräckligt. Det fortsatta resonemanget visar tydligt att det inte kan finnas fler nollställen än det funna. Sammanfattningsvis visar elevlösningen att det finns ett nollställe och att det inte kan finnas flera. Därmed uppfylls kraven för resonemangspoängen på A-nivå.

Uppgift 19

Elevlösning 1 (2 A_R)

$p'(x) = 3x^2 + 3$

$3x^2 + 3 = 0$

$x^2 = -1$

$x = \pm i$ alltså har funktionen inga extrempunkter

$p(0) = -18$ $p(3) = 18$ alltså finns exakt ett nollställe

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften på ett knapphändigt men godtagbart sätt. När det gäller kommunikation är lösningen inte helt lätt att följa och förstå. Det saknas genomgående förklaringar till beräkningar och resonemanget som leder till slutsatsen är inte helt tydligt. Lösningen anses därmed inte uppfylla kraven för kommunikationspoäng på A-nivå. Sammantaget ges lösningen två resonemangspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (2 A_R och 1 A_K)

$p'(x) = 3x^2 + 3$

Sätt $p'(x) = 0$

$3x^2 + 3 = 0$

$3x^2 = -3$

$x^2 = -1$

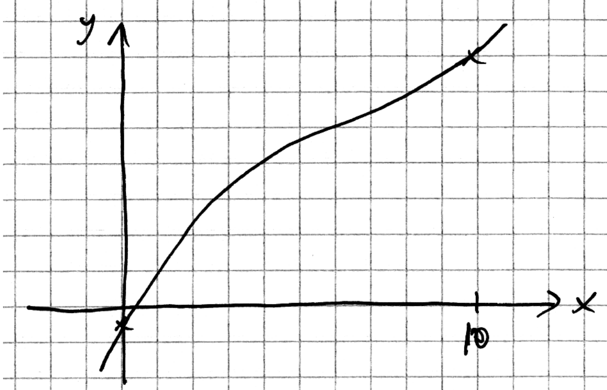
$x = \pm i$

Eftersom derivatan saknar reella nollställen så har funktionen inga extrempunkter.

$p(0) = 0^3 + 3 \cdot 0 - 18 = -18$

$p(10) = 10^3 + 3 \cdot 10 - 18 = 1012$

Skiss av kurvan:

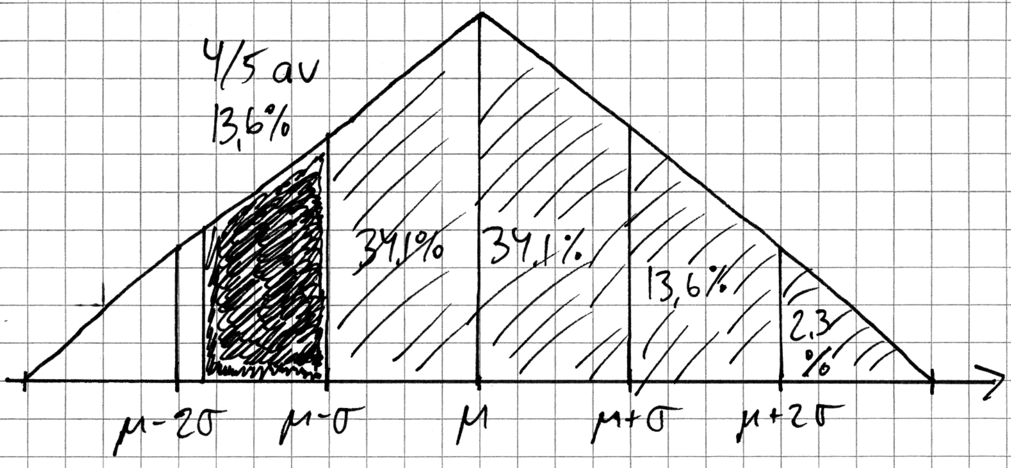


Jag vet att då $x=0$ är $y<0$ och att då $x=10$ är $y>0$, kurvan måste passera x-axeln någonstans mellan dessa x-värden. Eftersom kurvan saknar extrempunkter kan den aldrig "vända" och passera x-axeln igen. Den har då exakt ett nollställe.

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. När det gäller kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå. Den förklarande texten i slutet anses på ett korrekt sätt motivera att polynomet har exakt ett nollställe. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng.

Uppgift 25

Elevlösning 1 (0 poäng)



$\mu = 404\text{g}$ $\quad \sigma = 5\text{g}$

∵ skuggat område = mer än $\mu - \sigma - 4$

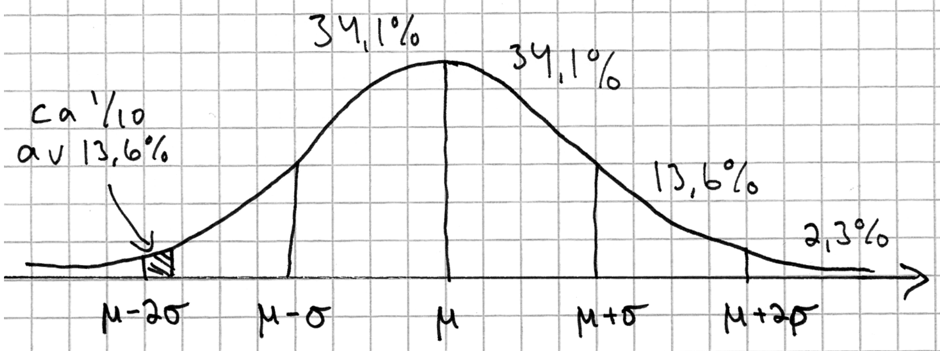
Räknar ihop alla procent:

$\frac{4}{5} \cdot 13{,}6 + 34{,}1 + 34{,}1 + 13{,}6 + 2{,}3 = 94{,}98\ \%$

Svar: 95% väger mer än 395 gram.

Kommentar: Elevlösningen visar ett försök att skatta hur stor del som täcks av vikter större än 395 gram. Noggrannheten i skattningen av hur stor del som finns till vänster om $\mu - \sigma$ anses inte motsvara en godtagbar ansats.

Elevlösning 2 (1 C_M)



$\mu = 404\text{ g} \quad \sigma = 5{,}0\text{ g} \Rightarrow 395\text{ g} = \mu - 1{,}8\sigma$

Det område som täcks in är ca

(Från höger)

$2{,}3\% + 13{,}6\% + 34{,}1\% + 34{,}1\% + 13{,}6\% - \frac{1}{10} \cdot 13{,}6\%$

$\approx 96{,}3\%$

Svar 96% väger minst 395 g.

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. I lösningen visas att $395\text{ g} = \mu - 1{,}8\sigma$. Vidare anges en rimlig uppskattning av hur stor del som utgörs av intervallen från $\mu - 2\sigma$ till $\mu - 1{,}8\sigma$. Denna skattning visar förståelse för problemet i sin helhet och anses motsvara en godtagbar ansats men lösningsmetoden anses inte ge tillräcklig noggrannhet för den andra modelleringspoängen. Sammantaget ges lösningen en modelleringspoäng på C-nivå.

Uppgift 28

Elevlösning 1 (2 A_{PL})

Om integralens värde är A så blir arean
under $y = k \cdot f(x) = k \cdot A$ och då är arean
mellan kurvorna $k \cdot A - A$
Men om $k < 1$ blir arean $A - k \cdot A$ i stället.

Svar: $k \cdot A - A$ om $k > 1$ och
$A - k \cdot A$ om $k < 1$

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften som helhet och leder fram till ett godtagbart svar. Därmed anses båda problemlösningspoängen vara uppfyllda. Gällande kommunikation är lösningen kortfattad och inte helt lätt att följa och förstå då det bland annat saknas beskrivning av vilken integral som avses. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (1 A_{PL} och 1 A_K)

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = \Big[kF(x)\Big]_a^b = \big(kF(b) - kF(a)\big) = kA$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = \big(F(b) - F(a)\big) = A$$

$$\left(\int_a^b k\,f(x)\,dx\right) - \left(\int_a^b f(x)\,dx\right) =$$

$$\big(kF(b) - kF(a)\big) - \big(F(b) - F(a)\big) =$$

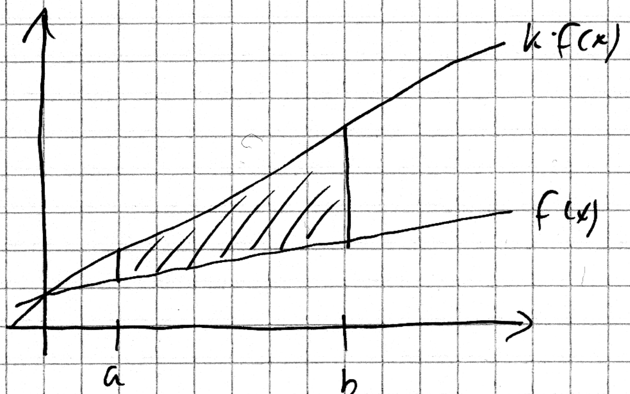
$$\underline{\underline{kA - A}}$$

Kommentar: Elevlösningen visar hur det ena fallet bestäms korrekt. Detta ger den första problemlösningspoängen på A-nivå. Gällande kommunikation så saknas fallet $k < 1$ men denna del av lösningen bedöms inte tillföra så mycket nytt kommunikationsmässigt. Vidare hade lösningen kunnat vara tydligare med en figur eller förklarande text. Trots detta anses kraven för en kommunikationspoäng på A-nivå nätt och jämnt vara uppfyllda. Sammantaget ges lösningen en problemlösningspoäng samt en kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösning 3 (1 A_{PL} och 1 A_K)

$$\int_a^b f(x)\,dx = A \Rightarrow \int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx = k\cdot A$$

Skiss



Arean som innesluts:

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= k\cdot A - A = A(k-1)$$

Svar: Arean mellan kurvorna blir $A(k-1)$

Kommentar: Elevlösningen visar hur det ena fallet bestäms. Detta ger den första problemlösningspoängen på A-nivå. När det gäller kommunikation bedöms lösningen vara lätt att följa och förstå. Den ritade skissen tillsammans med beräkningarna gör lösningen tydlig med symboler och representationer använda på ett korrekt sätt. Visserligen saknas fallet $k < 1$ men denna del av lösningen bedöms inte tillföra så mycket nytt kommunikationsmässigt. Därmed uppfylls kraven på kommunikationspoäng på A-nivå.

Ur ämnesplanen för matematik

Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. Kommunikation med hjälp av matematikens språk är likartad över hela världen. I takt med att informationstekniken utvecklas används matematiken i alltmer komplexa situationer. Matematik är även ett verktyg inom vetenskap och för olika yrken. Ytterst handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband.

Ämnets syfte

Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmåga att arbeta matematiskt. Det innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer. I undervisningen ska eleverna ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande. Vidare ska den bidra till att eleverna utvecklar förmåga att sätta in matematiken i olika sammanhang och se dess betydelse för individ och samhälle.

Undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. När så är lämpligt ska undervisningen ske i relevant praxisnära miljö. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer. Vidare ska den ge eleverna utmaningar samt erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär. Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel. I undervisningen ska eleverna dessutom ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier och även andra verktyg som kan förekomma inom karaktärsämnena.

Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:

1. använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
2. hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
3. formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
4. tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
5. följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
6. kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

Kunskapskrav Matematik kurs 4

Betyget E Eleven kan **översiktligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **översiktligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena **i bekanta situationer**. I arbetet hanterar eleven **några enkla** procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär **med viss säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av enkel karaktär**. Dessa problem inkluderar **ett fåtal** begrepp och kräver **enkla** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att tillämpa **givna** matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.

Eleven kan föra **enkla** matematiska resonemang och värdera med **enkla** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **med inslag av** matematiska symboler och andra representationer.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **kursens innehåll** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **enkla** resonemang om exemplens relevans.

Betyget D Betyget D innebär att kunskapskraven för E och till övervägande del för C är uppfyllda.

Betyget C Eleven kan **utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade aritmetiska och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja och** tillämpa matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade** matematiska resonemang och värdera med **nyanserade** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra enkla matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med viss anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade** resonemang om exemplens relevans.

Betyget B Betyget B innebär att kunskapskraven för C och till övervägande del för A är uppfyllda.

Betyget A Eleven kan **definiera och utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **flera** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa **komplexa** matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade aritmetiska och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet och på ett effektivt sätt**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av komplex karaktär**. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. **I problemlösning upptäcker eleven generella samband som presenteras med symbolisk algebra**. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja**, tillämpa **och anpassa** matematiska modeller. Eleven kan med **nyanserade** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade och nyanserade** matematiska resonemang, värdera med **nyanserade** omdömen **och vidareutveckla** egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med god anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade och nyanserade** resonemang om exemplens relevans.

Centralt innehåll Matematik kurs 4

Undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll:

Aritmetik, algebra och geometri

A6	Metoder för beräkningar med komplexa tal skrivna på olika former inklusive rektangulär och polär form.
A7	Komplexa talplanet, representation av komplext tal som punkt och vektor.
A8	Konjugat och absolutbelopp av ett komplext tal.
A9	Användning och bevis av de Moivres formel.
A10	Algebraiska och grafiska metoder för att lösa enkla polynomekvationer med komplexa rötter och reella polynomekvationer av högre grad, även med hjälp av faktorsatsen.
A11	Hantering av trigonometriska uttryck samt bevis och användning av trigonometriska formler inklusive trigonometriska ettan och additionsformler.
A12	Algebraiska och grafiska metoder för att lösa trigonometriska ekvationer.
A13	Olika bevismetoder inom matematiken med exempel från områdena aritmetik, algebra eller geometri.

Samband och förändring

F17	Egenskaper hos trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner och absolutbeloppet som funktion.
F18	Skissning av grafer och tillhörande asymptoter.
F19	Härledning och användning av deriveringsregler för trigonometriska, logaritm-, exponential- och sammansatta funktioner samt produkt och kvot av funktioner.
F20	Algebraiska och grafiska metoder för bestämning av integraler med och utan digitala verktyg, inklusive beräkningar av storheter och sannolikhetsfördelning.
F21	Begreppet differentialekvation och dess egenskaper i enkla tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnena.

Problemlösning

P1	Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.
P3	Matematiska problem av betydelse för samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen.
P4	Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.