

Delprov B	Uppgift 1-10. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 11-19. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	150 minuter för Delprov B och Delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 62 poäng varav 22 E-, 23 C- och 17 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget

E: 15 poäng

D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå

C: 32 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå

B: 41 poäng varav 5 poäng på A-nivå

A: 49 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritat figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux: _____

Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. Endast svar krävs. Skriv dina svar direkt i provhäftet.

1. Ange ett komplext tal z på formen $z = a + bi$ så att

a) $\operatorname{Im} z = 4$ _____ (1/0/0)

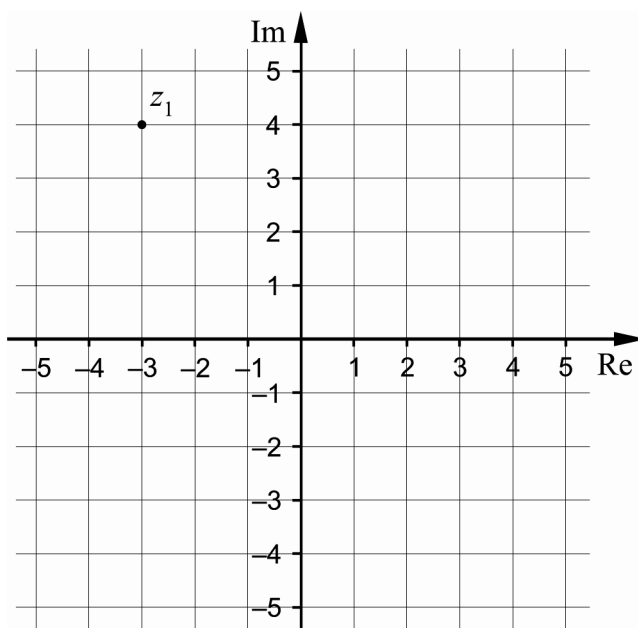
b) $\arg z = 45^\circ$ _____ (1/0/0)

2. Derivera

a) $f(x) = \cos 5x$ _____ (1/0/0)

b) $g(x) = x \cdot e^x$ _____ (1/0/0)

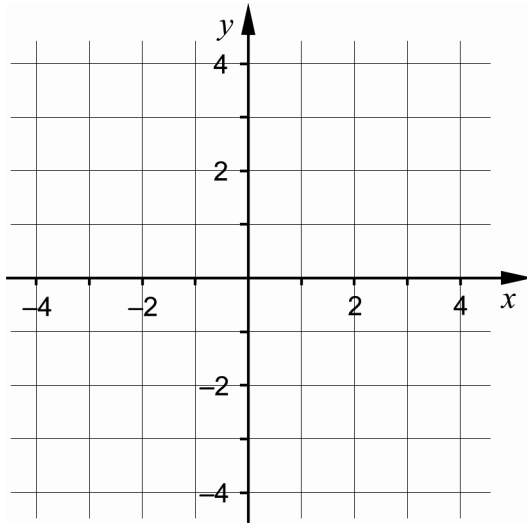
3. Figuren nedan visar ett komplext talplan där talet z_1 är markerat.



a) Beräkna $|z_1|$ _____ (1/0/0)

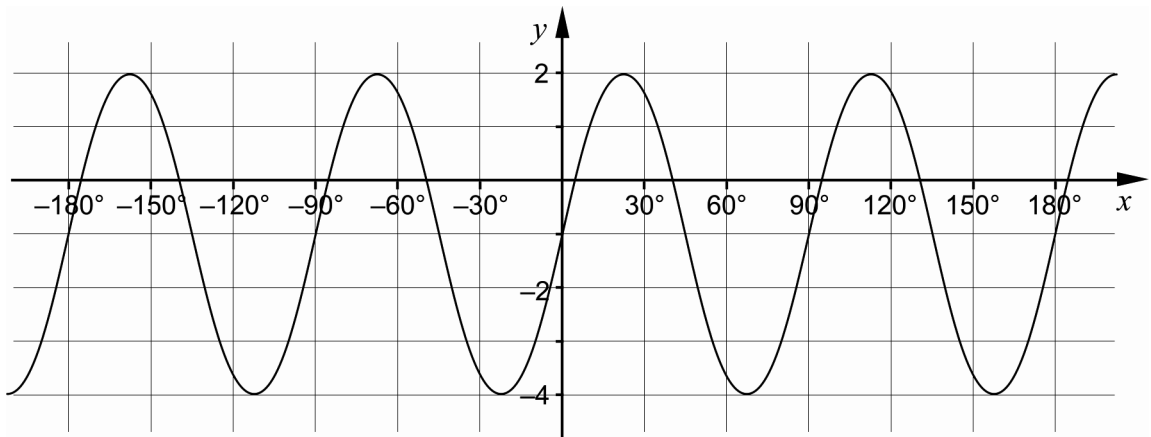
b) Markera talet \bar{z}_2 i det komplexa talplanet ovan då $z_2 = -5 - i$ (1/0/0)

4. a) Använd koordinatsystemet nedan och markera ett område vars area kan beräknas med $\int_{-1}^1 (3+x) dx$ (1/0/0)



- b) Bestäm värdet av $\int_{-1}^1 (3+x) dx$ _____ (1/0/0)

5. Figuren visar grafen till funktionen $y = A \sin kx + B$



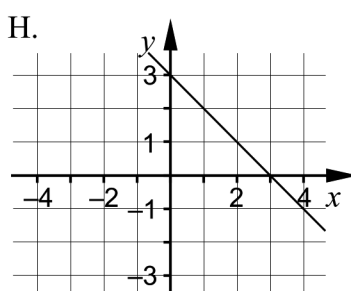
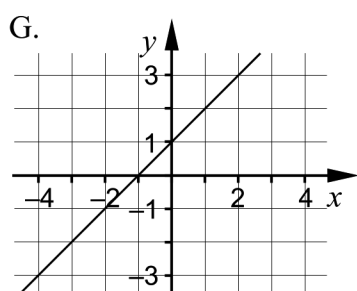
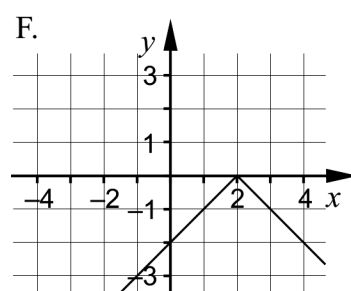
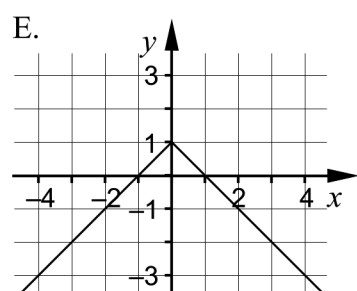
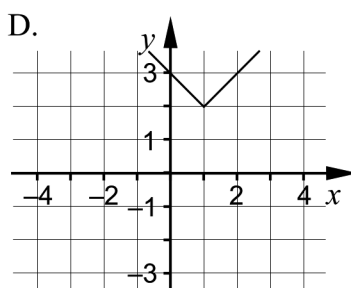
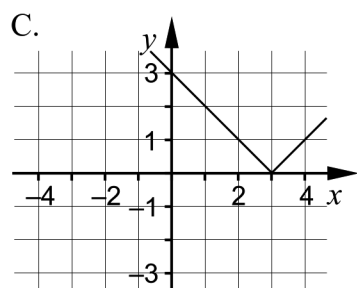
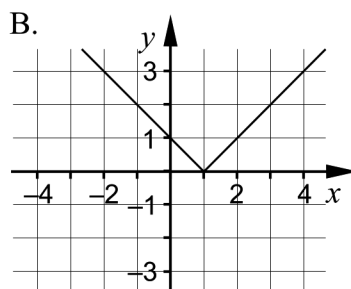
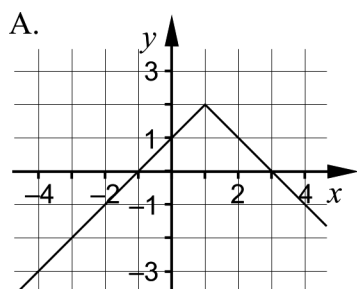
Bestäm konstanterna A , B och k

$A =$ _____

$B =$ _____

$k =$ _____ (1/1/0)

6. Ange vilken av följande figurer A-H som visar grafen till funktionen $f(x) = 2 - |x - 1|$

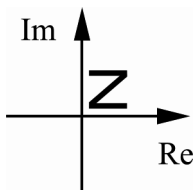


_____ (0/1/0)

7. Bestäm $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ då $f(x) = 2x + \sin x$

_____ (0/0/1)

8. En mängd komplexa tal som tillsammans formar bokstaven Z är markerade i det komplexa talplanet.



- a) Vilket av alternativen A-I nedan visar den figur som bildas av konjugaten till de tal som formar Z i figuren ovan?

_____ (0/1/0)

- b) Vilket av alternativen A-I nedan visar den figur som bildas då de tal som formar Z i ursprungsfiguren ovan multipliceras med i ?

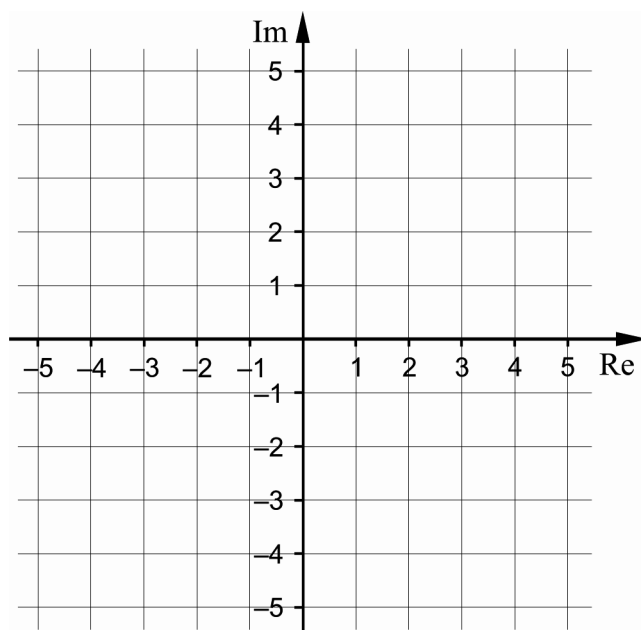
_____ (0/0/1)

<p>A.</p>	<p>B.</p>	<p>C.</p>
<p>D.</p>	<p>E.</p>	<p>F.</p>
<p>G.</p>	<p>H.</p>	<p>I.</p>

9. Ange en funktion f som har derivatan $f'(x) = x^2 \cdot e^{x^3+5}$

_____ (0/0/1)

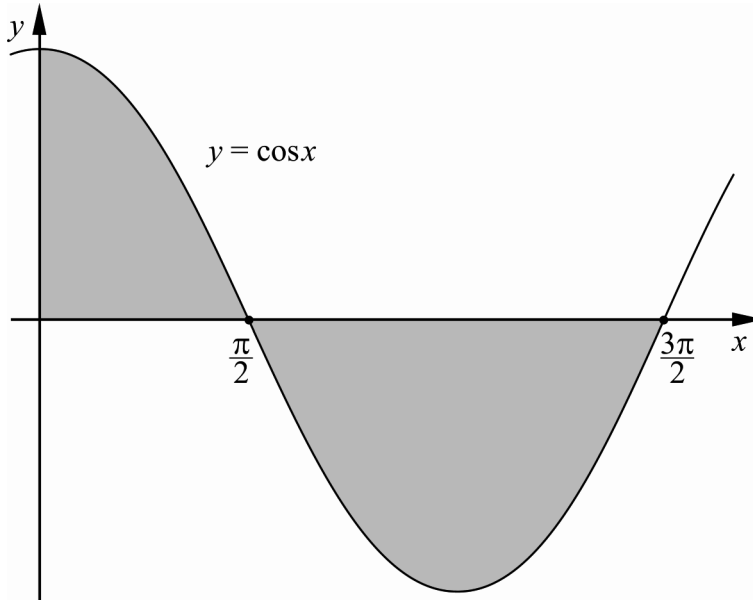
10. Markera i det komplexa talplanet de komplexa tal z för vilka det gäller att $|z - 4| = |z - 2i|$



(0/0/2)

Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

11. Beräkna den sammanlagda arean av de skuggade områdena i figuren nedan.



(2/0/0)

12. Visa att $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \sin^2 51^\circ + \cos^2 51^\circ$

(2/0/0)

13. Bestäm det komplexa talet $z = a + bi$ så att $\bar{z} + 3z = iz + 9$

(1/1/0)

14. Ekvationen $x^3 + 2x^2 + x - 18 = 0$ är given.

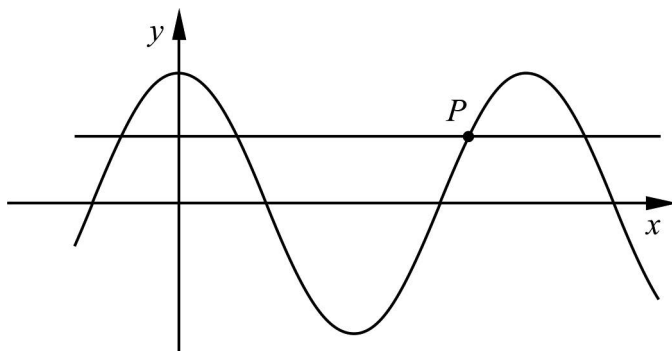
a) Visa att $x = 2$ är en rot till ekvationen.

(1/0/0)

b) Bestäm ekvationens övriga rötter.

(0/2/0)

15. Figuren nedan visar kurvan $y = \cos 2x$ och linjen $y = \frac{1}{2}$



Bestäm x -koordinaten för skärningspunkten P (1/2/0)

16. Lös ekvationen $z^3 + 27i = 0$ (0/3/0)

17. För de komplexa talen z_1 och z_2 gäller att $z_2 = z_1 \cdot (1-i)$ och att z_1 ligger i området $45^\circ < \arg z_1 < 135^\circ$ i det komplexa talplanet.

Bestäm i vilket område i det komplexa talplanet talet z_2 ligger. (0/1/1)

18. Beräkna $\int_0^1 f''(x) dx$ då $f(x) = \sin(\pi x^2)$ (0/1/2)

19. Visa att funktionen $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax$ saknar maximi- och minimipunkter om $a \geq 3$ (0/1/3)

Delprov D	Uppgift 20-27. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 62 poäng varav 22 E-, 23 C- och 17 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget

E: 15 poäng

D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå

C: 32 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå

B: 41 poäng varav 5 poäng på A-nivå

A: 49 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux: _____

Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

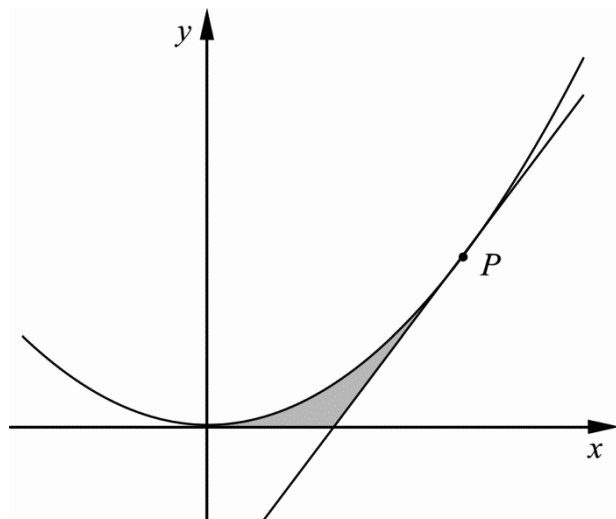
20. Under ett dygn i juli mättes temperaturen i Haparanda. Enligt en förenklad modell kan temperaturen under detta dygn beskrivas med sambandet $y = 15 + 5\sin(0,26x)$ där y °C är temperaturen och x är antalet timmar efter klockan 08.00.

Bestäm förändringshastigheten för temperaturen när klockan är 12.00. (2/0/0)

21. Bestäm talet a så att $y = a \cdot e^{2x}$ blir en lösning till differentialekvationen $y' + y = e^{2x}$

(2/0/0)

22. Figuren nedan visar parabeln $f(x) = x^2$ och linjen $g(x) = 4x - 4$. Linjen tangerar parabeln i punkten P . Parabeln och linjen innesluter tillsammans med x -axeln ett område som skuggats i figuren.



Bestäm arean av det skuggade området.

(2/1/0)

23. Ange en funktion som har två lodräta asymptoter. *Endast svar krävs* (0/2/0)

24. Som ett led i ett bageris kvalitetskontroll vägs ett antal bakade kanelnäckor. Kvalitetskontrollen visar att vikten är normalfördelad med medelvikten 120 gram och standardavvikelsen 4,0 gram.

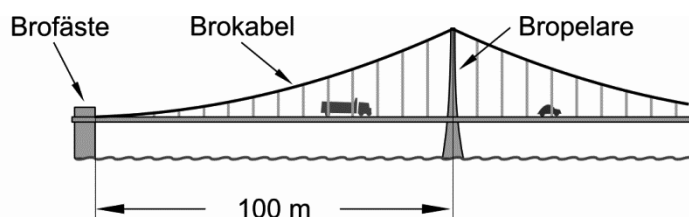
Hur många kanelnäckor kan förväntas väga mellan 115 gram och 130 gram om man en dag bakar 450 kanelnäckor? (0/2/0)

25. Enligt en förenklad modell kan formen av brokabeln i figuren nedan beskrivas med funktionen

$f(x) = 0,040x^{3/2}$ i intervallet $0 \leq x \leq 100$, där

f är höjden över vägbanan i meter och

x är avståndet i meter längs vägbanan mätt från brofästet.



Faktaruta:

Längden s av en kurva $y = f(x)$ i intervallet $a \leq x \leq b$ ges av sambandet

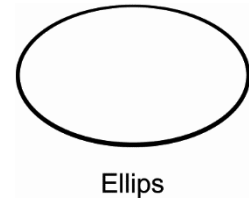
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Bestäm längden av brokabeln mellan brofästet och bropelaren. (0/2/0)

26. Ekvationen för en cirkel med medelpunkt i origo och med radien 1 är $x^2 + y^2 = 1$

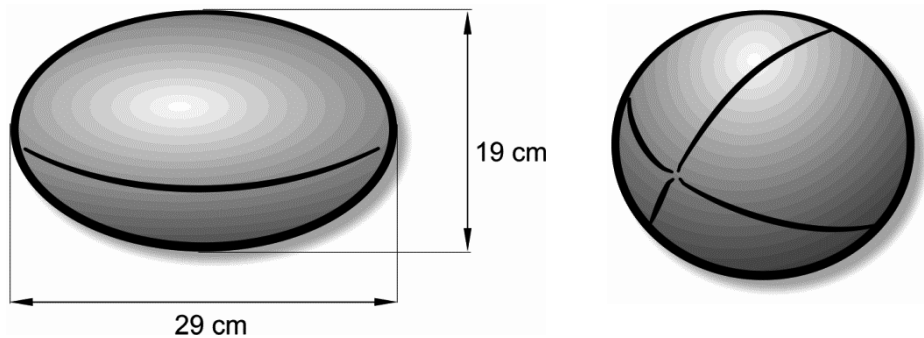
Ekvationen för en ellips med medelpunkt i origo och som skär axlarna i $(\pm a, 0)$ och $(0, \pm b)$ är på motsvarande sätt

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$



När en sådan ellips roterar runt x -axeln får man en ellipsoid.
I rugby används en boll som har formen av en ellipsoid.

En typ av boll som är godkänd för rugbymatcher har de mått som anges i figuren nedan.



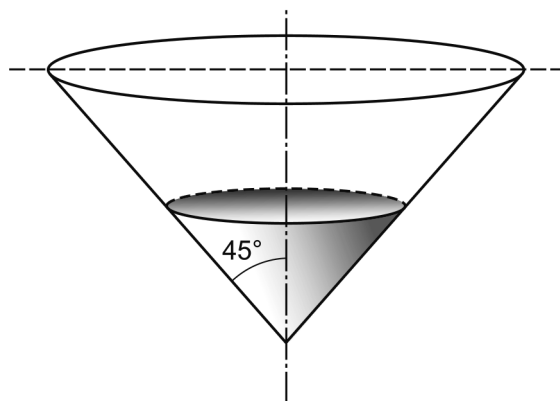
Bestäm volymen av denna boll.

(0/0/3)

27. Lasse och Marcus ska lösa följande uppgift:

En behållare har formen av en kon som figuren visar. Behållaren är tom från början. Vatten tillförs med hastigheten $(25 + 0,2t)$ liter/min, där t är tiden i minuter från påfyllningens start.

Med vilken hastighet stiger behållarens vattennivå då den är 7,0 dm?



Lasse räknar först ut att det tar 13,6 minuter för vattennivån att bli 7,0 dm.

Marcus ska använda Lasses resultat för att lösa resten av uppgiften.

Marcus börjar med att beteckna vattennivån med h och bestämmer volymen i behållaren uttryckt i h . Sedan beräknar han den efterfrågade hastigheten.

- a) Utgå från Lasses resultat och genomför Marcus del av lösningen. (0/1/1)
- b) Visa att Lasse har räknat rätt, det vill säga att vattennivån efter 13,6 minuter är 7,0 dm. (0/1/2)

Innehåll

Allmänna riktlinjer för bedömning	3
Bedömningsanvisningar	3
Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga	4
Provsammanställning – Kunskapskrav	5
Provsammanställning – Centralt innehåll	6
Kravgränser	7
Resultatsammanställning.....	7
Bedömningsformulär.....	8
Bedömningsanvisningar	9
Delprov B	9
Delprov C	10
Delprov D	12
Bedömda elevlösningar	15
Uppgift 4a.....	15
Uppgift 12.....	15
Uppgift 15.....	16
Uppgift 19.....	18
Uppgift 20.....	19
Uppgift 23.....	20
Uppgift 24.....	21
Uppgift 25.....	23
Uppgift 27.....	24
Ur ämnesplanen för matematik	26
Kunskapskrav Matematik kurs 4.....	27
Centralt innehåll Matematik kurs 4.....	28

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som provas. De olika förmågorna är inte beroende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsanvisningar

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt olika modeller:

Godtagbar ansats, t.ex. ...	+1 E _P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (...)	+1 E _P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. ...
1 E _R	1 E _R och 1 C _R	1 E _R , 1 C _R och 1 A _R

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan innehålla något ovidkommande eller sakna något steg. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

Förutom den allmänna beskrivningen av kraven kan ibland mer utförliga beskrivningar ges i samband med de bedömda elevlösningar där kommunikationspoäng förekommer.

Provsammanställning – Kunskapskrav

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 4 i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 14b_1 och 14b_2 den första respektive andra poängen i uppgift 14b.

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå																					
		E				C				A													
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK										
B	1a	1																					
	1b	1																					
	2a		1																				
	2b		1																				
	3a	1																					
	3b	1																					
	4a	1																					
	4b		1																				
	5_1	1																					
	5_2					1																	
	6					1																	
	7									1													
	8a							1															
	8b																					1	
9									1														
10_1									1														
10_2																					1		
C	11_1		1																				
	11_2			1																			
	12_1				1																		
	12_2				1																		
	13_1	1																					
	13_2					1																	
	14a				1																		
	14b_1					1																	
	14b_2					1																	
	15_1		1																				
	15_2						1																
	15_3								1														
	16_1						1																
	16_2						1																
16_3						1																	

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå																						
		E				C				A														
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK											
C	17_1												1											
	17_2																					1		
	18_1									1														
	18_2													1										
	18_3																		1					
	19_1														1									
	19_2																					1		
	19_3																					1		
	19_4																						1	
	D	20_1																						
		20_2																						
		21_1																						
		21_2																						
		22_1																						
22_2																								
22_3																								
23_1																								
23_2																								
24_1																								
24_2																								
25_1																								
25_2																								
26_1																							1	
26_2																						1		
26_3																						1		
27a_1																								
27a_2																						1		
27b_1																								
27b_2																						1		
27b_3																						1		
Total		7	5	7	3	3	7	10	3	4	1	7	5											
Σ		62					22					23									17			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Provsammanställning – Centralt innehåll

Tabell 2 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 4 i förhållande till nivå och centralt innehåll. En lista över det centrala innehållet återfinns i slutet av detta häfte.

Delprov	Uppg.	Nivå			Centralt innehåll Kurs Ma4																			
		E	C	A	Aritmetik, algebra och förändring									Samband och förändring					Problem-lösning					
					A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	F17	F18	F19	F20	F21	P1	P3	P4				
B	1a	1	0	0	X																			
	1b	1	0	0	X																			
	2a	1	0	0													X							
	2b	1	0	0													X							
	3a	1	0	0		X	X																	
	3b	1	0	0		X	X																	
	4a	1	0	0														X						
	4b	1	0	0														X						
	5	1	1	0										X										
	6	0	1	0										X										
7	0	0	1													X								
8a	0	1	0		X	X														X				
8b	0	0	1		X															X				
9	0	0	1													X	X							
10	0	0	2	X		X														X				
C	11	2	0	0													X			X				
	12	2	0	0						X		X												
	13	1	1	0	X		X																	
	14a	1	0	0					X															
	14b	0	2	0					X															
	15	1	2	0						X		X									X			
	16	0	3	0	X			X	X															
	17	0	1	1	X	X																		
	18	0	1	2													X	X						
19	0	1	3								X													
D	20	2	0	0												X					X			
	21	2	0	0														X			X			
	22	2	1	0													X				X			
	23	0	2	0										X							X			
	24	0	2	0														X			X			
	25	0	2	0														X			X			
	26	0	0	3														X			X			
	27a	0	1	1													X				X			
27b	0	1	2														X			X				
Total		22	23	17																				

Kravgränser

Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).

Tillsammans kan de ge 62 poäng varav 22 E-, 23 C- och 17 A-poäng.

Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla tre delprov.

Kravgräns för provbetyget

E: 15 poäng

D: 24 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå

C: 32 poäng varav 13 poäng på minst C-nivå

B: 41 poäng varav 5 poäng på A-nivå

A: 49 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Bedömningsformulär

Elev: _____ Klass: _____ Provbetyg: _____

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
B	1a												
	1b												
	2a												
	2b												
	3a												
	3b												
	4a												
	4b												
	5_1												
	5_2												
	6												
	7												
	8a												
	8b												
9													
10_1													
10_2													
C	11_1												
	11_2												
	12_1												
	12_2												
	13_1												
	13_2												
	14a												
	14b_1												
	14b_2												
	15_1												
	15_2												
	15_3												
	16_1												
16_2													
16_3													

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
C	17_1												
	17_2												
	18_1												
	18_2												
	18_3												
	19_1												
	19_2												
	19_3												
	19_4												
	D	20_1											
20_2													
21_1													
21_2													
22_1													
22_2													
22_3													
23_1													
23_2													
24_1													
24_2													
25_1													
25_2													
26_1													
26_2													
26_3													
27a_1													
27a_2													
27b_1													
27b_2													
27b_3													
Total													
Σ													


Total	7	5	7	3	3	7	10	3	4	1	7	5	
Σ	62	22				23				17			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Bedömningsanvisningar


Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.


Delprov B

- | | |
|---|---|
| 1. | Max 2/0/0 |
| a) Korrekt svar (t ex $z = 2 + 4i$) | +1 E _B |
| b) Korrekt svar (t ex $z = 2 + 2i$) | +1 E _B |
| 2. | Max 2/0/0 |
| a) Korrekt svar ($f'(x) = -5 \sin 5x$) | +1 E _P |
| b) Korrekt svar ($g'(x) = e^x + x \cdot e^x$) | +1 E _P |
| 3. | Max 2/0/0 |
| a) Korrekt svar (5) | +1 E _B |
| b) Korrekt markerad punkt ($\bar{z}_2 = -5 + i$) | +1 E _B |
| 4. | Max 2/0/0 |
| a) Godtagbart markerat område | +1 E _B |
| <i>Se avsnittet Bedömda elevlösningar.</i> |  |
| b) Korrekt svar (6) | +1 E _P |
| 5. | Max 1/1/0 |
| Godtagbart angivet värde för minst en av konstanterna A , B eller k | +1 E _B |
| med i övrigt godtagbart svar ($A = 3$, $B = -1$ och $k = 4$) | +1 C _B |
| 6. | Max 0/1/0 |
| Korrekt svar (A) | +1 C _B |

- 7.** **Max 0/0/1**
 Korrekt svar (3) +1 A_B
- 8.** **Max 0/1/1**
 a) Korrekt svar (H) +1 C_{PL}
 b) Korrekt svar (D) +1 A_{PL}
- 9.** **Max 0/0/1**
 Korrekt svar (t ex $\frac{e^{x^3+5}}{3}$) +1 A_B
- 10.** **Max 0/0/2**
 Godtagbar ansats, markerar minst ett komplext tal z som uppfyller villkoret +1 A_B
 med godtagbart ritad linje ($\text{Im } z = 2 \cdot \text{Re } z - 3$) +1 A_{PL}

Delprov C

- 11.** **Max 2/0/0**
 Godtagbar ansats, t ex beräknar en delarea korrekt +1 E_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (3 a.e.) +1 E_{PL}
- 12.** **Max 2/0/0**
 Godtagbar ansats, t ex inser att trigonometriska ettan kan användas +1 E_R
 med ett i övrigt enkelt resonemang som visar att $VL = HL$ +1 E_R
- Se avsnittet **Bedömda elevlösningar.*** 
- 13.** **Max 1/1/0**
 Godtagbar ansats, t ex visar insikt om att $\bar{z} = a - bi$ och $iz = ai - b$ +1 E_B
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($z = 2 + i$) +1 C_P

- 14.** **Max 1/2/0**
- a) Godtagbart enkelt resonemang som visar att $VL = HL$ +1 E_R
- b) Godtagbar ansats, t ex faktoriserar $x^3 + 2x^2 + x - 18$ och kommer fram till att övriga rötter fås ur ekvationen $x^2 + 4x + 9 = 0$ +1 C_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = -2 \pm i\sqrt{5}$) +1 C_P
- 15.** **Max 1/2/0**
- Godtagbar ansats, t ex ställer upp ekvationen $\cos 2x = \frac{1}{2}$ +1 E_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (150°) +1 C_{PL}
- Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, \pm , gradtecken, termer såsom period, skärningspunkt, ekvation, växande samt hänvisning till enhetscirkeln, figur etc. +1 C_K
- Se avsnittet Bedömda elevlösningar.* 
- 16.** **Max 0/3/0**
- Godtagbar ansats, t ex skriver om $-27i$ till $27(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$ +1 C_P
 med godtagbar fortsättning, bestämmer minst en rot *eller* anger +1 C_P
- $$\begin{cases} r = 3 \\ v = 90^\circ + n \cdot 120^\circ \end{cases}$$
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $\begin{cases} z_1 = 3(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) \\ z_2 = 3(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) \\ z_3 = 3(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) \end{cases}$ +1 C_P
- 17.** **Max 0/1/1**
- Godtagbar ansats, t ex bestämmer $\arg(1-i) = -45^\circ$ *eller* anger att $\arg z_2 = \arg z_1 + \arg(1-i)$ +1 C_R
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (t ex ” z_2 ligger i första kvadranten” *eller* $0^\circ < \arg z_2 < 90^\circ$) +1 A_R

- 18.** **Max 0/1/2**
- Godtagbar ansats, t ex deriverar $f(x)$ +1 C_P
- med godtagbar fortsättning, t ex inser att $\int_0^1 f''(x)dx = f'(1) - f'(0)$ +1 A_B
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (-2π) +1 A_P

- 19.** **Max 0/1/3**
- Godtagbar ansats, t ex löser ekvationen $f'(x) = 0$ +1 C_R
- Visar att f saknar extrempunkter då $a > 3$ +1 A_R
- Visar att f saknar extrempunkter då $a = 3$ +1 A_R
- Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, olikhetstecken, \pm , rottecken, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, termer såsom funktion, derivata, andraderivata, terrasspunkt, maximipunkt, minimipunkt, extrempunkt, nollställe, reella rötter, strängt växande, tecken-schema etc. +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.






Delprov D

- 20.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t ex inser att $y'(4)$ ska bestämmas +1 E_M
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($0,66 \text{ }^\circ\text{C/h}$) +1 E_M

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



- 21.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, sätter in $y = a \cdot e^{2x}$ och $y' = 2a \cdot e^{2x}$ i differentialekvationen +1 E_{PL}
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($a = \frac{1}{3}$) +1 E_{PL}

- 22.** **Max 2/1/0**
- Godtagbar ansats, t ex bestämmer x -koordinaten för skärningspunkten mellan kurvorna, $x = 2$ +1 E_{PL}
- med korrekt tecknat uttryck för bestämning av någon relevant area,
- t ex $\int_1^2 (4x - 4) dx$ +1 E_{PL}
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($\frac{2}{3}$ a.e. $\approx 0,67$ a.e.) +1 C_{PL}
-
- 23.** **Max 0/2/0**
- Anger en funktion med minst en lodrät asymptot +1 C_B
- med godtagbart svar (t ex $y = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$) +1 C_{PL}
- Se avsnittet Bedömda elevlösningar.* 
-
- 24.** **Max 0/2/0**
- Godtagbar ansats, t ex ställer upp korrekt integral, t ex
- $$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_{115}^{130} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-120}{4}\right)^2} dx$$
- +1 C_M
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (400 st) +1 C_M
- Se avsnittet Bedömda elevlösningar.* 
-
- 25.** **Max 0/2/0**
- Godtagbar ansats, ställer upp ett korrekt integraluttryck för brokabelns längd,
- t ex $\int_0^{100} \sqrt{1 + (0,06x^{0,5})^2} dx$ +1 C_M
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (109 m) +1 C_M
- Se avsnittet Bedömda elevlösningar.* 

26.

Max 0/0/3

Godtagbar ansats, t ex ställer upp ellipsens ekvation, $\left(\frac{x}{14,5}\right)^2 + \left(\frac{y}{9,5}\right)^2 = 1$ +1 A_M

med godtagbar fortsättning, ställer upp en integral för beräkning av volymen,

$$t \text{ ex } V = \int_{-14,5}^{14,5} \pi \cdot 9,5^2 \left(1 - \left(\frac{x}{14,5}\right)^2\right) dx \quad +1 A_M$$

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (5,5 dm³) +1 A_M

27.

Max 0/2/3

a) Godtagbar ansats, t ex tecknar ett korrekt uttryck för volymen uttryckt i h och

ställer upp kedjeregeln, $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (0,18 dm/min) +1 A_{PL}

b) Godtagbar ansats, tecknar ett integraluttryck för den volym som tillförs *eller* bestämmer volymen, 360 dm³, då höjden är 7,0 dm +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning som visar att vattennivån efter 13,6 minuter är 7,0 dm +1 A_{PL}

Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara likhetstecken, integraltecken, derivatabeteckningar, integraluttryck, termer såsom integral, integrationsgränser, hänvisning till kedjeregeln etc. +1 A_K

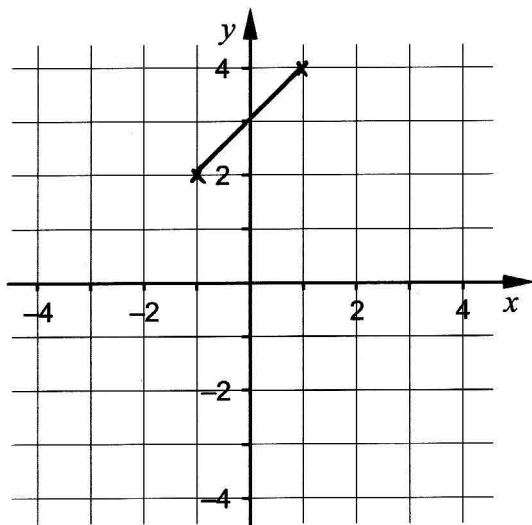
Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



Bedömda elevlösningar

Uppgift 4a

Elevlösning 1 (0 poäng)



Kommentar: Elevlösningen visar linjen $y = 3 + x$ markerad i intervallet $-1 \leq x \leq 1$. Eftersom inget område är markerat anses lösningen inte motsvara kraven för ett godtagbart svar.

Uppgift 12

Elevlösning 1 (2 E_R)

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \sin^2 51^\circ + \cos^2 51^\circ$$

$$VL = \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$$

$$HL = \sin^2 51^\circ + \cos^2 51^\circ = 1$$

$$VL = HL$$

Kommentar: Elevlösningen visar genom att behandla leden var för sig att $HL = VL = 1$. Dock saknas hänvisning till trigonometriska ettan. Trots detta bedöms lösningen som nätt och jämnt godtagbar. Sammantaget ges lösningen två resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 15

Elevlösning 1 (1 E_P och 1 C_{PL})

$$y = \cos 2x$$

$$\text{linjen } y = \frac{1}{2}$$

$$\text{Perioden} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

$$y = \cos 2x$$

$$y = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \pm 60^\circ + n360^\circ$$

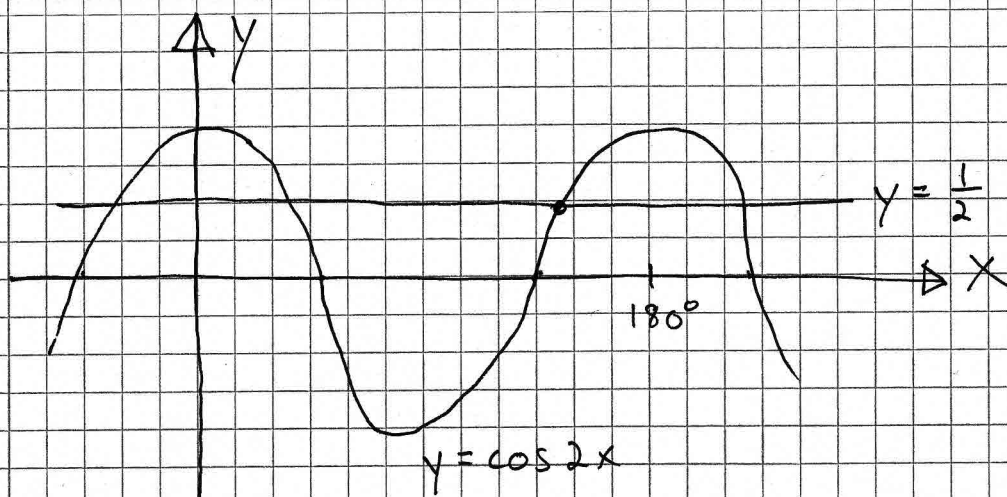
$$x = \pm 30^\circ + n180^\circ$$

$$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

$$\text{Punkten } P: \text{ s } x\text{-koordinat} = 150^\circ$$

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Gällande kommunikation behandlas likhetstecknet felaktigt på fjärde raden från slutet. Även i övrigt är lösningen knapphändig kommunicerad, t ex varför punkten P :s x -koordinat har värdet 150° . Lösningen uppfyller därmed inte kraven för kommunikationspoäng på C-nivå. Sammantaget ges lösningen en procedurpoäng på E-nivå och en problemlösningspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (1 EP, 1 CPL och 1 CK)



$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pm 60^\circ + n360^\circ$$

$$x = \pm 30^\circ + n180^\circ$$

P ligger inom 1:a perioden

$$x_1 = 30^\circ + 180^\circ = 210^\circ$$

$$x_2 = -30^\circ + 180^\circ = 150^\circ$$

Eftersom P ligger innan 180 är

x-värdet för P = 150

Svar: $x = 150$

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Gällande kommunikation är lösningen möjlig att följa och förstå även om gradbeteckningen saknas på några ställen i slutet av lösningen. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng inklusive en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 19

Elevlösning 1 (1 C_R och 1 A_R)

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + ax$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + a$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

Om $f(x)$ saknar max- och minpunkt så är dess derivata ej lika med noll, dvs. ekvationen $f'(x) = 0$ har inga reella lösningar.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x + a = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + \frac{a}{3} = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{a}{3}}$$

Om denna ekvation saknar reella lösningar så är $(1 - \frac{a}{3}) < 0$

$$1 - \frac{a}{3} < 0 \Rightarrow \frac{a}{3} > 1 \Rightarrow \underline{\underline{a > 3}}$$

Om $a = 3$ så får dock ekvationen en reell dubbelrot ($x = -1$).

Det finns dock ändå ingen max- eller minpunkt i $x = -1$ eftersom andra derivatan i den punkten är lika med 0:

$$f''(-1) = 6(-1) + 6 = -6 + 6 = 0$$

Detta betyder att $f(x)$ inte har någon max- eller minpunkt för $a > 3$ samt för $a = 3$.

$f(x)$ saknar därför max- och minpunkter för $a \geq 3$

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Slutsatsen att kurvan saknar max- och minpunkter då $x = -1$ baseras på att $f''(-1) = 0$, vilket inte är korrekt. Gällande kommunikation är lösningen lätt att följa men eftersom lösningen inte kan anses vara i huvudsak korrekt så uppfylls inte kraven för kommunikationspoäng på A-nivå. Sammantaget ges lösningen en resonemangspoäng på C-nivå och den första resonemangspoängen på A-nivå.

Elevlösning 2 (1 CR och 2 AR)

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + ax$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + a$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 6x + a = 0$$

$$x^2 + 2x + \frac{a}{3} = 0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{a}{3}}$$

Inga reella rötter

om:

$$1 - \frac{a}{3} < 0$$

$$1 < \frac{a}{3}$$

$$3 < a$$

Teckenstudium visar

$$\text{om } a=3 \Leftrightarrow x=-1$$

$$x \quad -1$$

$$f'(x) \nearrow \quad \nearrow$$

ingen max/min p. \Leftrightarrow

\Leftrightarrow om $a \geq 3$

Finns inga max/min p. v.s.v.

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Gällande kommunikation så är teckenschemat inte komplett och förklaringen till att "inga reella rötter" ger "finns inga max/min p." saknas. Lösningen uppfyller därmed inte kraven för kommunikationspoäng på A-nivå. Sammantaget ges lösningen en resonemangspoäng på C-nivå och två resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 20

Elevlösning 1 (2 EM)

Förändringshastigheten kl 12.00 = $y'(4)$

Ritar upp funktionen på räknaren och bestämmer

$$y'(4) \text{ till } 0,66^\circ\text{C/h}$$

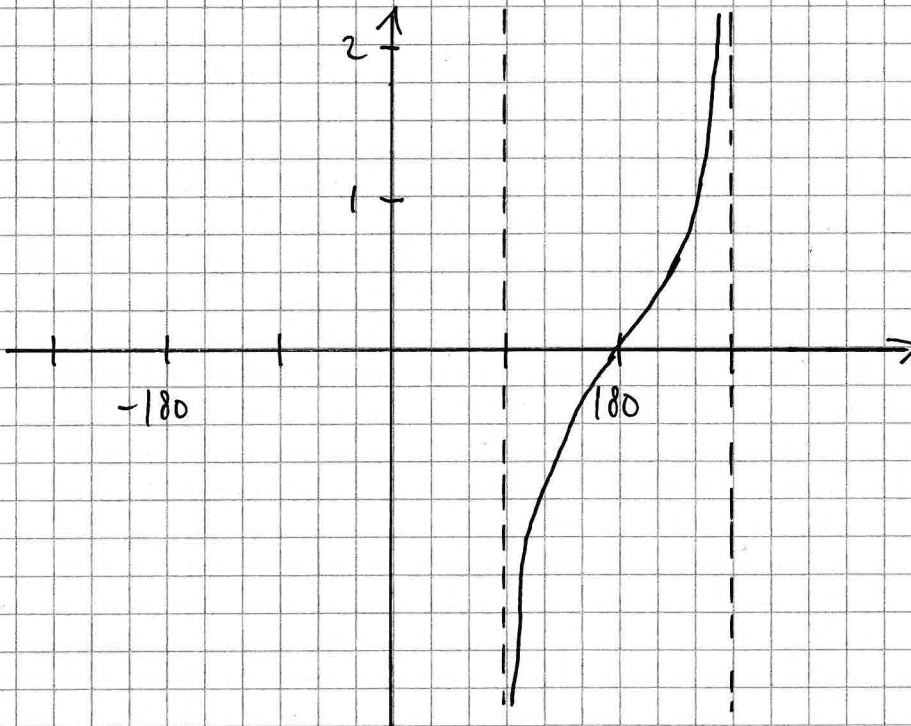
$$\text{Svar: } 0,66^\circ\text{C/h}$$

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Motivering av hur räknaren använts saknas men lösningen anses trots det nätt och jämnt uppfylla kraven för den andra modelleringspoängen. Sammantaget ges lösningen två modelleringspoäng på E-nivå.

Uppgift 23

Elevlösning 1 (1 C_B och 1 C_{PL})

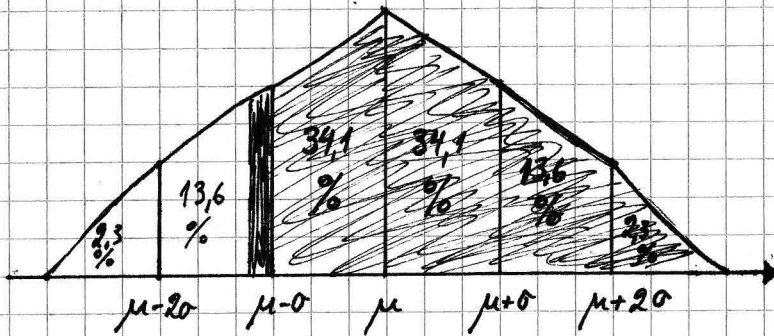
En funktion som har två lodräta asymptoter är $f(x) = \tan x$.



Kommentar: Elevlösningen visar en funktion med oändligt många asymptoter. Funktionen har fler än två asymptoter men svaret anses ändå vara godtagbart. Sammantaget ges lösningen en begreppsöng och en problemlösningsoäng på C-nivå.

Uppgift 24

Elevlösning 1 (0 poäng)



$$\mu = 120 \text{ g} \quad \sigma = 4 \text{ g}$$

Hur många kanelnäckor av 450 st kan väga mellan 115 g och 130 g?

$\therefore \mu - \sigma - 1$ och $\mu + 2\sigma + 2 =$ skuggat område

$\frac{13,6\%}{10} = 1,36\%$ extra chans då standardavvikelsen är $\mu - \sigma - 1$.

Räknar ihop alla procent:

$$34,1 + 34,1 + 13,6 + 2,3 + 1,36 = 85,46\%$$

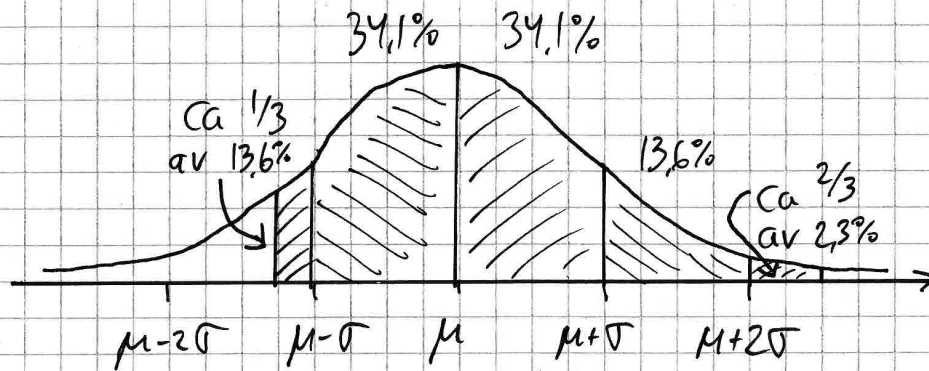
Beräknar hur många bullar:

$$450 \cdot 0,8546 \approx 385 \text{ st. bullar.}$$

Svar: 385 st bullar väger mellan 115 & 130 g.

Kommentar: Elevlösningen visar ett försök att skatta hur stor del som täcks av intervallet 115–130 gram. Noggrannheten i skattningen av hur stor del som finns till vänster om $\mu - \sigma$ och till höger om $\mu + 2\sigma$ anses inte motsvara en godtagbar ansats.

Elevlösning 2 (1 CM)



$$\mu = 120\text{g} \quad \sigma = 4,0\text{gram} \Rightarrow 115\text{g} = \mu - 1,25\sigma \quad 130\text{g} = \mu + 2,5\sigma$$

Det område som täcks in är ca

$$\frac{1}{3} \cdot 13,6 + 34,1 + 34,1 + 13,6 + \frac{2}{3} \cdot 2,3 \approx 87,9\%$$

$$\text{Antal bullar: } 0,879 \cdot 450 \approx 396 \quad \text{Svar: } 396 \text{ st}$$

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. I lösningen visas att $115\text{g} = \mu - 1,25\sigma$ och att $130\text{g} = \mu + 2,5\sigma$. Vidare anges en rimlig uppskattning av hur stor del som utgörs av intervallen från $\mu - 1,25\sigma$ till $\mu - \sigma$ samt från $\mu + 2\sigma$ till $\mu + 2,5\sigma$. Denna skattning visar förståelse för problemet i sin helhet och anses motsvara en godtagbar ansats men lösningsmetoden anses inte ge tillräcklig noggrannhet för den andra modelleringspoängen. Sammantaget ges lösningen en modelleringspoäng på C-nivå.

Uppgift 25

Elevlösning 1 (2 CM)

$$f(x) = 0,040 x^{3/2} \quad 0 \leq x \leq 100$$

$$f'(x) = 0,06 \cdot \sqrt{x}$$

$$S = \int_0^{100} \sqrt{1 + (0,06 \cdot \sqrt{x})^2} dx$$

miniräknaren ger svaret

$$S = 108,5$$

Svar: 109 m

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. I lösningen redovisas inte hur bestämningen av integralens värde med hjälp av räknare gjorts. Trots detta anses lösningen nätt och jämnt vara godtagbar då tillvägagångssätten för integralberäkning på räknaren är begränsade. Sammantaget ges lösningen två modelleringspoäng på C-nivå.

Uppgift 27

Elevlösning 1 (2 CPL och 2 APL)

$$a/ \quad \frac{dV}{dt} = 25 + 0,2t \quad r=h \quad t=13,6 \text{ min} \quad h=7,0 \text{ dm}$$

$$V = \frac{\pi h^3}{3} \quad \frac{dV}{dr} = \pi h^2$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dh}} =$$

$$= \frac{25 + 0,2t}{\pi h^2} = \frac{25 + 0,2 \cdot 13,6}{\pi \cdot 7^2} \approx 0,18 \text{ dm/min}$$

$$b/ \quad \int_0^{13,6} (25 + 0,2t) dt = \left[25t + 0,1t^2 \right]_0^{13,6}$$

$$= 25 \cdot 13,6 + 0,1 \cdot 13,6^2 - 0 = 358,496 \text{ liter}$$

$$V = 358,496 \text{ liter} = \frac{\pi \cdot h^3}{3}$$

$$3V = \pi h^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}} = h = 6,995496851 \approx 7 \text{ dm} \quad \text{svar: ja, det är } 7 \text{ dm vatten}$$

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Gällande kommunikation är lösningen inte helt lätt att följa och förstå då förklaringar till beräkningar saknas i stora delar av

lösningen, t ex till att $r = h$ i början av lösningen, motivering till att $V = \frac{\pi h^3}{3}$ på rad två i

lösningen samt motivering till att det är volymen som beräknas med hjälp av integralen i b).

Dessutom innehåller lösningen en felaktighet på rad två där det står att $\frac{dV}{dr} = \pi h^2$ och inte det

korrekta $\frac{dV}{dh} = \pi h^2$. Lösningen uppfyller därmed inte kraven för kommunikationspoäng på

A-nivå. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng på C-nivå och två problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (2 CPL, 2 APL och 1 AK)

a) Volym = V vattenytans radie = r

$$r = h \cdot \tan 45^\circ = h \cdot 1 = h$$

$$V(h) = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi h^3}{3}$$

$$V'(h) = \pi h^2 = \frac{dV}{dh}$$

$$\frac{dV}{dt} = 25 + 0,2t$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{dV/dt}{dV/dh} = \frac{25 + 0,2 \cdot 13,6}{\pi \cdot 7,0^2} =$$

$$\frac{27,72}{49\pi} \approx 0,18 \text{ dm/min}$$

Svar: a) ca 0,18 dm/min

b) $V'(t) = 25 + 0,2t \Rightarrow V(t) = 25t + 0,1t^2$

$$V(h) = \frac{\pi h^3}{3} \Rightarrow V(7,0) = \frac{\pi \cdot 7,0^3}{3} = \frac{343\pi}{3}$$

$$V(t) = \frac{343\pi}{3} \Rightarrow 25t + 0,1t^2 = \frac{343\pi}{3}$$

$$75t + 0,3t^2 - 343\pi = 0 \Rightarrow t^2 + 250t - 3591,8876 = 0 \Rightarrow$$

$$t \approx -125 \pm \sqrt{125^2 + 3591,8876} = -125 \pm 138,625 \Rightarrow t > 0$$

$$t \approx 13,6 \text{ min V.S.V.}$$

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Gällande kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå även om förklaringar till beräkningarna saknas på några ställen i lösningen, t ex saknas kommentar gällande begynnelsevillkoret för volymen i b)-uppgiften. Kraven för kommunikationspoäng på A-nivå uppfylls därmed nått och jämnt. Sammantaget ges lösningen samtliga möjliga poäng inklusive en kommunikationspoäng på A-nivå.

Ur ämnesplanen för matematik

Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklades såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. Kommunikation med hjälp av matematikens språk är likartad över hela världen. I takt med att informationstekniken utvecklades användes matematiken i alltmer komplexa situationer. Matematik är även ett verktyg inom vetenskap och för olika yrken. Ytterst handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband.

Ämnets syfte

Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmåga att arbeta matematiskt. Det innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer. I undervisningen ska eleverna ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande. Vidare ska den bidra till att eleverna utvecklar förmåga att sätta in matematiken i olika sammanhang och se dess betydelse för individ och samhälle.

Undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. När så är lämpligt ska undervisningen ske i relevant praxisnära miljö. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer. Vidare ska den ge eleverna utmaningar samt erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär. Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel. I undervisningen ska eleverna dessutom ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier och även andra verktyg som kan förekomma inom karaktärsämnen.

Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:

1. använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
2. hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
3. formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
4. tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
5. följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
6. kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

Kunskapskrav Matematik kurs 4

Betyget E Eleven kan **översiktligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **översiktligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen i **bekanta situationer**. I arbetet hanterar eleven **några enkla** procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär **med viss säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av enkel karaktär**. Dessa problem inkluderar **ett fåtal** begrepp och kräver **enkla** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att tillämpa **givna** matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.

Eleven kan föra **enkla** matematiska resonemang och värdera med **enkla** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **med inslag av** matematiska symboler och andra representationer.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **kursens innehåll** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **enkla** resonemang om exemplens relevans.

Betyget D Betyget D innebär att kunskapskraven för E och till övervägande del för C är uppfyllda.

Betyget C Eleven kan **utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade aritmetiska och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja och** tillämpa matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade** matematiska resonemang och värdera med **nyanserade** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra enkla matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med viss anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade** resonemang om exemplens relevans.

Betyget B Betyget B innebär att kunskapskraven för C och till övervägande del för A är uppfyllda.

Betyget A Eleven kan **definiera och utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **flera** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa **komplexa** matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade aritmetiska och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet och på ett effektivt sätt**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av komplex karaktär**. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. **I problemlösning upptäcker eleven generella samband som presenteras med symbolisk algebra**. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja, tillämpa och anpassa** matematiska modeller. Eleven kan med **nyanserade** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade och nyanserade** matematiska resonemang, värdera med **nyanserade** omdömen **och vidareutveckla** egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med god anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade och nyanserade** resonemang om exemplens relevans.

Centralt innehåll Matematik kurs 4

Undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll:

Aritmetik, algebra och geometri

- A6** Metoder för beräkningar med komplexa tal skrivna på olika former inklusive rektangulär och polär form.
- A7** Komplexa talplanet, representation av komplext tal som punkt och vektor.
- A8** Konjugat och absolutbelopp av ett komplext tal.
- A9** Användning och bevis av de Moivres formel.
- A10** Algebraiska och grafiska metoder för att lösa enkla polynomekvationer med komplexa rötter och reella polynomekvationer av högre grad, även med hjälp av faktorsatsen.
- A11** Hantering av trigonometriska uttryck samt bevis och användning av trigonometriska formler inklusive trigonometriska ettan och additionsformler.
- A12** Algebraiska och grafiska metoder för att lösa trigonometriska ekvationer.
- A13** Olika bevismetoder inom matematiken med exempel från områdena aritmetik, algebra eller geometri.

Samband och förändring

- F17** Egenskaper hos trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner och absolutbeloppet som funktion.
- F18** Skissning av grafer och tillhörande asymptoter.
- F19** Härledning och användning av deriveringsregler för trigonometriska, logaritm-, exponential- och sammansatta funktioner samt produkt och kvot av funktioner.
- F20** Algebraiska och grafiska metoder för bestämning av integraler med och utan digitala verktyg, inklusive beräkningar av storheter och sannolikhetsfördelning.
- F21** Begreppet differentialekvation och dess egenskaper i enkla tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnen.

Problemlösning

- P1** Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.
- P3** Matematiska problem av betydelse för samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen.
- P4** Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.